# Aula 19 (21/10)

## Produto Interno

Pergunta: como determinar se 2 vetores de $\mathbb{R}^n$ são perpendiculares?

Def: Dados $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$, o produto interno de $u$ e $v$ é o número

$$\langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i .$$

Ex: $u = (1,2,1)$, $v = (0,-1,-1) \Rightarrow \langle u, v \rangle = -3$

$u = (3,4)$, $v = (-4,3) \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$.

Exercício: Prove que $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

2) $\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

3) se $u \neq 0$ então $\langle u, u \rangle > 0$

4) $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se $u = 0$.

Def: A norma de um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é o número real $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. O vetor $u$ é unitário se $\|u\| = 1$.

Ex: $\|(1,-2,0)\| = \sqrt{\langle(1,-2,0),(1,-2,0)\rangle}$

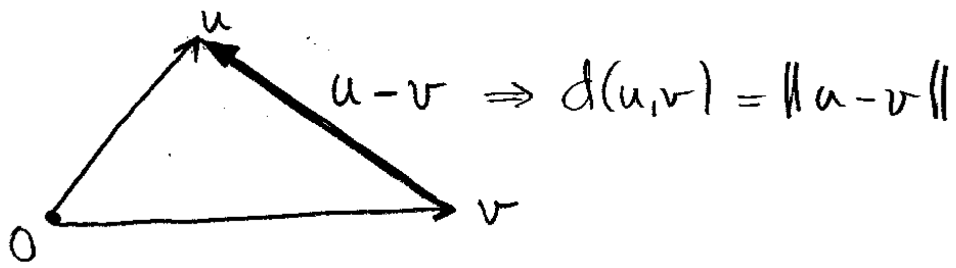
$= \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$ e

$\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\| = 1.$

Exercício: Verifique que se $u \neq 0$, então o vetor $\frac{1}{\|u\|}\cdot u$ é unitário.

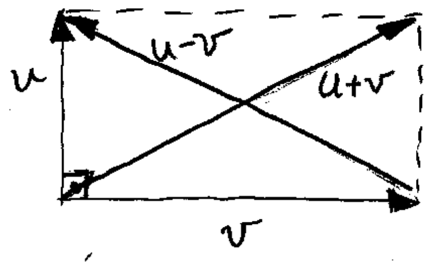
O que tem de perpendicular nisso tudo?

Def. A distância entre $u,v \in \mathbb{R}^n$ é o número real $d(u,v) = \|u-v\|$




Teorema: $u,v \in \mathbb{R}^n$ são perpendiculares se e somente se $\langle u,v\rangle = 0$.

Dem: u e v são perpendiculares se e somente se $\|u\|$ e $\|v\|$ são os comprimentos dos lados de um retângulo de "arestas" u e v




Mas $u$ e $v$ são lados de um retângulo se e somente se $\|u-v\| = \|u+v\|$. Vamos desenvolver essa equação: $\|u-v\| = \|u+v\| \iff$

$$\|u-v\|^2 = \|u+v\|^2 \iff$$

$$\iff \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}^{\,2} = \sqrt{\langle u+v, u+v\rangle}^{\,2}$$

$$\iff \langle u-v, u-v\rangle = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$\iff \cancel{\langle u,u\rangle} - 2\langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle} = \cancel{\langle u,u\rangle} + 2\langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle}$$

$$\iff -2\langle u,v\rangle = 2\langle u,v\rangle \iff \langle u,v\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Podemos então definir perpendicularidade usando $\langle u,v\rangle$.

<u>Def</u>: $u, v \in \mathbb{R}^n$ são <u>ortogonais</u> se $\langle u,v\rangle = 0$ e são <u>ortonormais</u> se além de ortogonais têm $\|u\| = \|v\| = 1$

<u>Def</u>: Uma base $\beta = \{u_1, \dots, u_k\}$ é <u>ortonormal</u> se $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle u_i, u_i\rangle = 1$.

<u>Ex</u>: A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é uma base ortonormal.

<u>Obs</u>: Em $\mathbb{R}^2$ é fácil encontrar vetores ortogonais: $(a,b)$ e $(-b,a)$ são ortogonais.

Em $\mathbb{R}^{2n}$ também são ortogonais os vetores
$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2n-1}, a_2), (-a_2, a_1, \dots, -a_{2n}, a_{2n-1})$.

Perpendicularidade fornece indep. linear!

Teorema: $\{u_1, \dots, u_k\}$ ortogonais não nulos. Então
$\{u_1, \dots, u_k\}$ LI.

Dem: Suponha $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0$. Então
$\langle a_1 u_1 + \dots + a_k u_k, u_j \rangle = 0$. Mas então
$a_1 \underbrace{\langle u_1, u_j \rangle}_{=0} + \dots + a_j \langle u_j, u_j \rangle + \dots + a_k \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{=0} = 0$

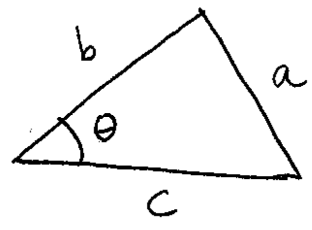
e assim $a_j \langle u_j, u_j \rangle = 0 \Longrightarrow a_j = 0$, pq $\langle u_j, u_j \rangle \neq 0$. ■

Exercício: Seja $\{u_1, \dots, u_k\}$ uma base ortonormal e $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$. Mostre que $a_j = \langle u, u_j \rangle$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

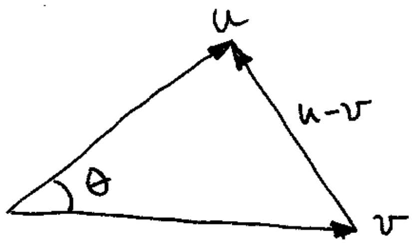
Pergunta: dá para calcular ângulos usando produto interno?

Sim! Lembre-se da lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$



Com vetores:



$a = \|u-v\|$

$b = \|u\|$, $c = \|v\|$. Então

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\cdot\|v\| \cos\theta$$

logo:

$$\langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\|u\|\cdot\|v\|\cos\theta$$

$$\cancel{\langle u,u\rangle} - 2\langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle} = \cancel{\langle u,u\rangle} + \cancel{\langle v,v\rangle} - 2\|u\|\cdot\|v\|\cos\theta$$

e então

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}, \quad \theta \in [0,\pi).}$$

Observe que se $\theta = \pi/2$, então $\langle u,v\rangle = 0$.

<u>Conseqüência 1</u>: $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$

<u>Dem</u>: como $|\cos\theta| \leq 1$, a formula acima nos fornece

$$|\langle u,v\rangle| = |\cos\theta|\cdot\|u\|\cdot\|v\| \leq \|u\|\cdot\|v\|. \quad \blacksquare$$

<u>Conseqüência 2</u>: (desigualdade triangular).

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Dem</u>:
$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$