Aula 17 (07/10)

Matrizes que representam transf lineares.

a) Sabemos que existe única $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (4,1,3)$ e $T(1,1) = (1,-2,3)$, onde $\beta = \{(1,0),(1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

Exercício: verificar que esta T é $T(x,y) = (4x-3y, x-3y, 3x)$.

Como $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é linear, então dados $a,b \in \mathbb{R}$,

$$\text{b) } T\big(\underbrace{\mathbf{a}(1,0) + \mathbf{b}(1,1)}_{u \in \mathbb{R}^2 \text{ genérico}}\big) = \mathbf{a}T(1,0) + \mathbf{b}(1,1)$$

$$= \mathbf{a}(4,1,3) + \mathbf{b}(1,-2,3). \quad (\star)$$

Vamos fixar uma base do contra-domínio $\mathbb{R}^3$, digamos

$$\gamma = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,-1,1)\}.$$

c) Já que $T(1,0) = (4,1,3) \in \mathbb{R}^3$ e
$T(1,1) = (1,-2,3) \in \mathbb{R}^3$, eles são C.L de γ:

$$T(1,0) = (4,1,3) = \mathbf{1}\cdot(1,0,1) + \mathbf{3}\cdot(1,1,0) + \mathbf{2}\cdot(0,-1,1) \quad \text{e}$$

$$T(1,1) = (1,-2,3) = \mathbf{2}\cdot(1,0,1) - \mathbf{1}\cdot(1,1,0) + \mathbf{1}\cdot(0,-1,1). \quad (\star\star)$$

Então $\circledast$ pode ser reescrito assim:

$$T(\mathbf{a}\cdot(1,0)+\mathbf{b}(1,1)) = \mathbf{a}\left[1\cdot(1,0,1)+3(1,1,0)+2(0,-1,1)\right]$$
$$+\ \mathbf{b}\left[2\cdot(1,0,1)-1(1,1,0)+1(0,-1,1)\right] =$$

$$= (\mathbf{a+2b})\cdot(1,0,1) + (\mathbf{3a-b})(1,1,0) + (\mathbf{2a+b})(0,-1,1)$$

<u>Resumindo</u>: * Escolhemos as bases β de $\mathbb{R}^2$ e γ de $\mathbb{R}^3$;

* Calculamos T em um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ cujas <u>coordenadas na base β são</u> $[u]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$;

* As <u>coordenadas</u> <u>na</u> <u>base γ</u> do vetor $T(u)$ são $[T(u)]_\gamma = \begin{bmatrix} a+2b \\ 3a-b \\ 2a+b \end{bmatrix}$.

A relação entre $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a+2b \\ 3a-b \\ 2a+b \end{bmatrix}$ é matricial:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a+2b \\ 3a-b \\ 2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

observe os coef. em negrito em $\circledast\circledast$

<u>Resumindo 2</u>: Dadas as bases β de $\mathbb{R}^2$ e γ de $\mathbb{R}^3$, ao pegar um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, sua imagem $T(u) \in \mathbb{R}^3$ terá coordenadas $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Em outras palavras:

$$\boxed{\begin{array}{l} T \text{ leva } u \in \mathbb{R}^2 \text{ em } T(u) \in \mathbb{R}^3 \text{, enquanto} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{leva as } \underline{\text{coordenadas de } u \text{ na base}}\ \beta \\ \text{nas } \underline{\text{coordenadas de } T(u) \text{ na base}}\ \gamma. \end{array} \end{array}}$$

Se denotarmos $[T]_{\gamma \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, a observação acima se traduz como

$$\boxed{[T(u)]_\gamma = [T]_{\gamma \leftarrow \beta} \cdot [u]_\beta}$$

Observe que em particular: $[(1,0)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$[T]_{\gamma \leftarrow \beta} [(1,0)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, que são

exatamente as coordenadas de $T(1,0) = (4,3,1)$ na base γ (veja o item c na pg 89). Analogamente,

$[(1,1)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $[T]_{\gamma \leftarrow \beta} [(1,1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

que são as coords de $T(1,1)$ na base γ (ver pg 89).

Def: Sejam $T: U \to V$ linear, $\beta = \{u_1, \dots, u_k\}$ base de U, $\gamma = \{v_1, \dots, v_s\}$ base de V. A matriz

$$[T]_{\gamma \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(u_1)]_\gamma & \cdots & [T(u_k)]_\gamma \\ | & & | \end{bmatrix}$$ é a

Matriz de representação de T nas bases β e γ.

Obs: se $T: U \to U$ e tomamos uma única base β comum ao domínio e ao contradomínio, denotaremos simplesmente $[T]_{\beta \leftarrow \beta}$ por $[T]_\beta$.

Exemplo: Seja $D: P_3 \to P_3$ a transformação $D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^3$ e considere $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$. Encontre $[D]_\beta$.

Sol: Seguiremos os passos do 1° exemplo.

* Calcular D nos elementos de β:

$D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $D(x^3) = 3x^2$.

* Determinar as coordenadas de cada imagem acima na base do contradomínio, que tb é β:

$$[D(1)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x^2)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[D(x^3)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

* Construir a matriz $[D]_\beta$:

$$[D]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para exemplificar a relação $[D(p)]_\beta = [D]_\beta [p]_\beta$ para $p \in P_3$: tome $p \in P_3$ genérico: $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

<u>Analiticamente</u>: $D(p) = b + 2cx + 3dx^2$

<u>Matricialmente</u>: $[p]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$. Então

$$[D(p)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Teorema</u>: A matriz $[T]_{\gamma \leftarrow \beta}$ satisfaz

$$[T(u)]_\gamma = [T]_{\gamma \leftarrow \beta} \cdot [u]_\beta$$

para todo $u \in U$.

Se pensarmos $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^s$ como conjuntos de vetores coluna, o teorema anterior pode ser pensado esquematicamente como a seguir:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\ ]_\beta}"'] & V \arrow[d, "{[\ ]_\gamma}"] \\
\mathbb{R}^k \arrow[r, "{[T]_{\gamma \leftarrow \beta}}"] & \mathbb{R}^s
\end{tikzcd}$$

<u>Exemplo</u>: $D^2 : P_3 \longrightarrow P_3$, $D^2 = D \circ D$, ou seja, $D^2(a + bx + cx^2 + dx^3) = 2c + 6dx$. Encontre $[D^2]_\beta$ onde $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$.

<u>Sol</u>: $D^2(1) = 0$, $D^2(x) = 0$, $D^2(x^2) = 2$, $D^2(x^3) = 6x$

Então: $[D^2(1)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[D^2(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[D^2(x^2)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e $[D^2(x^3)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Portanto:

$$[D^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observação MUITO IMPORTANTE:

$$[D^2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [D]_\beta \cdot [D]_\beta .$$

Isso não aconteceu por acaso:

<u>Teorema</u>: $S: U \longrightarrow V$, $T: V \longrightarrow W$ lineares e β, γ, ξ bases de U, V, W respectivamente. Então

$$[T \circ S]_{\xi \leftarrow \beta} = [T]_{\xi \leftarrow \gamma} \cdot [S]_{\gamma \leftarrow \beta}$$