Aula 18 (09/10)

Matrizes de mudança de bases.

Vimos que dada $T: U \to V$ e bases β de U e γ de V, existe uma matriz $[T]_{\gamma \leftarrow \beta}$ que representa T com relação a essas bases.

Ex 1: $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $Id(u) = u$,

$\beta = \{(1,2,3),(2,1,1),(1,3,2)\}$, $\gamma = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

Calcular $[T]_{\gamma \leftarrow \beta}$:

$$Id(1,2,3) = (1,2,3) = 1\cdot(1,0,1) + 0(1,1,0) + 2(0,1,1)$$
$$Id(2,1,1) = (2,1,1) = 1\cdot(1,0,1) + 1\cdot(1,1,0) + 0\cdot(0,1,1)$$
$$Id(1,3,2) = (1,3,2) = 0\cdot(1,0,1) + 1\cdot(1,1,0) + 2\cdot(0,1,1)$$

Então $[Id]_{\gamma \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Lembre-se que $[Id(u)]_\gamma = [Id]_{\gamma \leftarrow \beta} \cdot [u]_\beta$.

Como $Id(u) = u \ \forall u \in \mathbb{R}^3$, então

$$\boxed{[u]_\gamma = [Id]_{\gamma \leftarrow \beta} \cdot [u]_\beta}$$

Def: Sejam U espaço vetorial, β e γ bases de U, $Id: U \longrightarrow U$ a transformação $Id(u) = u$, $\forall u$. A matriz $[Id]_{\gamma \leftarrow \beta}$ é chamada matriz de mudança de base de β para γ.

Obs: A relação $[u]_\gamma = [Id]_{\gamma \leftarrow \beta} \cdot [u]_\beta$ não é exclusividade do exemplo anterior: ela vale porque se $Id(u) = u$, então $[Id(u)]_\gamma = [u]_\gamma$.

No exemplo 1: seja $u \in \mathbb{R}^3$, com $[u]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

ou seja, $u = 2(1,2,3) - 1(2,1,1) + 3(1,3,2)$
$= (3, 12, 11)$. Então

$$[u]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \text{ ou seja,}$$

$$u = 1.(1,0,1) + 2(1,1,0) + 10(0,1,1) = (3, 12, 11).$$

Então a matriz $[T]_{\gamma \leftarrow \beta}$ transforma coordenadas na base β em coordenadas na base γ.

Pergunta Natural: Que matriz faz o contrário? (transf. coordenadas da base γ em coords na base β?)

<u>Teorema</u>: Sejam U espaço vetorial, β e γ bases de U.
Então
$$[Id]_{\beta\leftarrow\gamma} = [Id]^{-1}_{\gamma\leftarrow\beta} \quad ⊛$$

<u>Demonstração</u>: Sabemos que
$$[Id]_{\beta\leftarrow\gamma} \cdot [Id]_{\gamma\leftarrow\beta} = [Id \circ Id]_{\beta\leftarrow\beta} = [Id]_{\beta\leftarrow\beta}.$$

Mas $[Id]_{\beta\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, vale a igualdade ⊛ ■

<u>Como inverter uma matriz na "prática"?</u>

- Uma <u>observação</u> sobre escalonamento total:

Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/7 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & 5/7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 5/7 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 1/7 \\ y = 5/7 \end{array}$$

Ou seja:

> O escalonamento total fornece diretamente a solução de $Ax = b$ do lado direito.

Usaremos essa constatação para calcular a inversa de uma matriz A. Lembre que a <u>inversa</u> de $A \in M_{n\times n}$ é uma matriz $B \in M_{n\times n}$ tal que $A \cdot B = Id$.

●● Uma <u>observação</u> sobre o produto de matrizes:

Sejam $A, B \in M_{n\times n}$ e $b_1, \dots, b_n$ as colunas de B.

Então

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Exercício: demonstrar essa igualdade.

Com essas duas observações em mãos, vamos reformular o problema "como inverter uma matriz?":

<u>Problema</u>: Dada $A \in M_{n\times n}$, como encontrar $B \in M_{n\times n}$ tal que $A \cdot B = Id$, ou seja, como encontrar $b_1, b_2, \dots, b_n$ vetores-coluna tais que

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ab_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad Ab_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

Precisamos resolver esses n sistemas lineares. As soluções formarão as colunas de B, que será a inversa de A.

Para resolver cada sistema, escalonaremos totalmente cada uma das matrizes abaixo:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}\end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}\end{array}\right], \dots, \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\\vdots\\0\\1\end{matrix}\end{array}\right].$$

Como o escalonamento total de A independe dos vetores coluna $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, podemos escalonar totalmente

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1\end{matrix}}\end{array}\right]$$

. Ao final, segundo a observação ●, no lugar da matriz identidade aparecerá a inversa B de A.

Ex: No exemplo 1, $[Id]_{\gamma\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$. Vamos calcular $[Id]_{\beta\leftarrow\gamma}$:

Sol: Vamos calcular $[Id]_{\gamma\leftarrow\beta}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 + 2l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2 - \frac{1}{4} l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3/4]{l_1 \leftarrow l_1 - l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right].$$

Portanto,

$$[Id]_{\beta \leftarrow \gamma} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Apenas a título de exemplo: com o mesmo u da pg 97:

$$[Id]_{\beta \leftarrow \gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

<u>Exercício Importante</u>: Sejam $Id : U \longrightarrow U$ a transformação linear $Id(u) = u$, $\forall u \in U$ e seja $\beta = \{u_1, \ldots, u_k\}$ uma base de U. Verifique que

$$[Id]_{\beta \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$