Aula 14 (25/09)

Exs de Transf. Lineares; Núcleo e Imagem

Def: Seja $T: U \to V$ uma transf. linear. O núcleo de T é o conjunto $Nuc(T) = \{u \in U \,/\, T(u) = 0\}$. A imagem de T é o conjunto $Im(T) = \{T(u) \,/\, u \in U\}$.

Obs: $Nuc(T) \neq \emptyset$ (Por quê?)

Ex 1) $T: \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{DOMÍNIO}} \to \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{CONTRADOMÍNIO}}$; $T(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$.

a) T é linear:

- $T((x,y)+(a,b)) = (x+a+y+b, x+a-y-b, x+a+2y+2b)$

  $T(x,y) + T(a,b) = (x+y+a+b, x-y+a-b, x+2y+a+2b)$

  são iguais!

- $T(\lambda(x,y)) = \lambda T(x,y)$ (Exercício).

b) Núcleo de T:

$T(x,y) = (0,0,0) \iff (x+y, x-y, x+2y) = (0,0,0)$

$\iff x(1,1,1) + y(1,-1,2) = (0,0,0)$

Como $\{(1,1,1),(1,-1,2)\}$ é LI, necessariamente $x=y=0$. Então

$$Nuc(T)=\{(0,0)\} \text{ e } \dim Nuc(T)=0$$

c) Imagem de T: "que vetores são produzidos por T"?

$$T(x,y)=(x+y,x-y,x+2y)=x(1,1,1)+y(1,-1,2)$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ genéricos. Então

$$Im(T)=\text{span}\{(1,1,1),(1,-1,2)\} \text{ e } \dim Im(T)=2.$$

d) T é injetiva?

Sim, pois se $T(x,y)=T(a,b)$, então

$$x(1,1,1)+y(1,-1,2)=a(1,1,1)+b(1,-1,2).$$

Como $\{(1,1,1),(1,-1,2)\}$ é LI, $x=a$, $y=b$ e portanto $(x,y)=(a,b)$.

e) T é sobrejetiva?

Não, pois por exemplo $(0,1,0)\in\mathbb{R}^3$ (contradom) mas não existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(0,1,0)$, ou seja, $Im(T)\neq\mathbb{R}^3$.

Ex2) $D : P_3 \longrightarrow P_3$; $D(p) = p'(x)$ (derivada)

Explicitamente (p/ quem nunca estudou derivadas):

$$D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$$

a) D é linear? (Exercício)

b) Núcleo de D: "quais $p \in P_3$ são tais que $D(p) = 0$"?

$$D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$$
$$= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 .$$

Se e somente se $b = 0$, $2c = 0$, $3d = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Então $Nuc(T) = \{ a + 0x + 0x^2 + 0x^3 \,/\, a \in \mathbb{R} \}$

$= span\{1\}$ e $\dim Nuc(T) = 1$.

c) Imagem de T: "que polinômios D produz"?

Como $D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$,

então $Im(D) = span\{1, 2x, 3x^2\}$ e $\dim Im(D) = 3$.

(note que $Im(D) = P_2$).

d) D é injetivo?

Não, pois todo polin. da forma $a + 0x + 0x^2 + 0x^3$

satisfaz $D(a + 0x + 0x^2 + 0x^3) = 0$.

e) D é sobrejetivo?

Não, pois os elementos da imagem têm grau no máximo 2. Logo, por exemplo não existe $p \in P_3$ tal que $D(p) = x^3$. Então

$Im(D) \neq P_3$.

Ex 3) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e considere $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

dada por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a) T é linear? (Exercício)

b) Núcleo de T: "quem são os $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tais que $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$"?

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ é LI, necessariamente $x = y = 0$.

Então $Nuc(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\dim Nuc(T) = 0$

c) Imagem de T:

$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Como $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ é base de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

d) T é sobrejetiva? Sim, é exatamente o que o item anterior provou.

e) T é injetiva?

Sim, pois novamente: se $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$,

então $x\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$. Como $\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}$ é LI, $x=a$, $y=b$ e então $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

Ex4) $F: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(A) = \mathrm{tr}(A)$.

a) F é linear? (Exercício)

b) Núcleo de F: seja $A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ genérica.

Então $F\left(\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right) = a+d = 0$ se e somente se $a=-d$. Portanto,

$$\mathrm{Nuc}(F) = \left\{\begin{bmatrix}-d & b\\c & d\end{bmatrix};\ b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$ e

assim $\dim \mathrm{Nuc}(F) = 3$.

c) Imagem de F: temos que $\text{Im}(F) = \mathbb{R}$, pois dado $t \in \mathbb{R}$, a matriz $\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ satisfaz $F\left(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = t$. Logo, $\dim \text{Im}(F) = 1$.

d) F é portanto sobrejetiva. (item anterior).

e) F é injetiva? Não, pois toda matriz da forma $\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem $F\left(\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0$.

Núcleo X Injetividade

Teorema: Seja $T: U \to V$ uma transf linear. Então T é injetiva se e somente se $\text{Nuc}(T) = \{0\}$.

($\Longrightarrow$) Suponha T injetiva. O núcleo de T são as soluções em u de $T(u) = 0 = T(0)$. Como T é injetiva, $u = 0$ e portanto $\text{Nuc}(T) = \{0\}$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\text{Nuc}(T) = \{0\}$. Se $T(u) = T(\bar{u})$, então $T(u - \bar{u}) = 0$. Portanto $u - \bar{u} \in \text{Nuc}(T)$, ou seja, $u - \bar{u} = 0$ e assim $u = \bar{u}$ e T é injet.