Aula 7 (02/09)

Espaços Vetoriais e subespaços

Em $\mathbb{R}^n$, temos uma soma $+$ e um produto $\cdot$ por números reais.

Pergunta: Além de vetores do $\mathbb{R}^n$, o que mais podemos somar e multiplicar por números reais?

Definição: Um espaço vetorial consiste de

- Um conjunto não vazio V.
- Uma soma: tal que se $u, v \in V$ então $u+v \in V$
- Uma mult. por escalar real tal que se $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$ então $\alpha \cdot u \in V$.

Satisfazendo: $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) • $u + v = v + u$ (comutativa)
- $(u+v)+w = u+(v+w)$ (associativa)
- existe elem. neutro da soma, denotado por 0, tal que $u+0 = 0+u = u$.
- existe inverso aditivo: dado u, existe w tal que $u+w = 0$ (notação: $-u$).

2) • $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

• $1 \cdot u = u$

3) $\left.\begin{array}{l} \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \\ (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \end{array}\right\}$ distributividade.

Exemplos: 1) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

2) $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

3) $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ com as operações usuais: Lembre que

$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \,;\, z_i \in \mathbb{C}\}$. (Parece o $\mathbb{R}^n$, mas com nos complexos...)

Pergunta: Algo não é espaço vetorial?

Exemplos: 4) $V = \mathbb{Z}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \in \mathbb{Z}\}$

falha a multiplicação por escalar real.

por exemplo: $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha(x,y) \notin \mathbb{Z}^2$.

5) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

tem elemento neutro $(0,0)$, todo elemento tem inverso aditivo mas a soma nem sempre resulta dentro de V.

$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin V$ mesmo com $(1,0), (0,1) \in V$

6) $V = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) ; a_{ij} \geq 0\}$.

Tem elemento neutro; mas não tem inverso aditivo. Além disso não vale $\alpha A \in V$ se $\alpha < 0$.

7) $V = \mathbb{Q}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \in \mathbb{Q}\}$.

O que falha? Exercício.

<u>Definição</u>: Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial.

$W \subset V$ é um <u>subespaço vetorial de V</u> se $(W, +, \cdot)$ é ele mesmo um espaço vetorial. (com as mesmas operações de $(V, +, \cdot)$)

Teorema: $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V

se

- $0 \in W$
- $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
- $u \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in W.$

Exemplos: Prove que os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais:

8) de $\mathbb{R}^n$: $W = span\{v_1, \dots, v_k\}$

- $0 \in W$ ok
- $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ ok
- $u \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in W$ ok

9) de $M_{3x3}(\mathbb{R})$: $W = \{A \in M_{2x3}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0$ se $i > j\}$

Como são essas matrizes?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

- $0 \in W$?
- $A, B \in W \Rightarrow A + B \in W$?
- $A \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A \in W$?

Exercício.

10) de $\mathbb{R}^n$: {soluções do sistema homogêneo

$$Ax = 0 \} = W$$

- $0 \in W$? Sim, pois $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ é sol. de $Ax = 0$.

- $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$?

u solução, v solução, $u+v$ é solução? Sim,

pois $A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$ ok!

- $u \in W$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in W$? Sim, pois

u solução, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u$ solução? Sim, pois

$A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda \cdot 0 = 0$ ok!

11) (Exercício). Sejam $H, W \subset V$ subespaços vetoriais de V. Prove que $H \cap W$ é subespaço vetorial de V também.

12) $H \cup W$ é subespaço vetorial?

13) $W = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) ;\ a_{ii} = 1 \}$ é subespaço vetorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$?

<u>Definição</u>: $u \in V$ é <u>combinação linear</u> de $u_1, \dots, u_k \in V$ se existem $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ tais que $u = t_1 u_1 + \dots + t_k u_k$.

<u>Definição</u>: O espaço gerado por $u_1, \dots, u_k \in V$ é o conjunto de todas as possíveis comb. lineares de $u_1, \dots, u_k$:

$$\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \;;\; a_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, \dots, k \right\}$$

<u>Exemplo</u>: O que é o espaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

<u>Sol</u>: $t_1 [\quad] + t_2 [\quad] + \dots + t_6 [\quad]$

$$= \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & t_4 & t_5 \\ 0 & 0 & t_6 \end{bmatrix}$$

São exatamente as matrizes triangulares superiores do exemplo 9.

Exercício interessante: Quem seriam os possíveis "geradores" dos conjuntos $W = \{A \in M_{3\times3} \,/\, A^T = A\}$

$H = \{A \in M_{3\times3} \,/\, A^T = -A\}$?

Mais um bom exercício: descreva os elementos do subespaço $H \cap W$, onde H e W são os do exercício anterior.

Teorema: Sejam $v_1, \dots, v_k \in V$. Então $H = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ é subespaço vetorial de V.

Dem: • $0 = 0v_1 + \dots + 0v_k \in H$ ok!

• $u = \sum t_i v_i$, $w = \sum \alpha_i v_i$ $\Rightarrow$ $u + w = \sum (t_i + \alpha_i) v_i$ ok!

• $\lambda u = \lambda \sum t_i v_i = \sum \lambda t_i v_i$
$= \sum (\lambda t_i) v_i$ ■

Exercícios: FIX: 3.1, 3.2, 3.6 (a,b), 3.9
PROB: 3.1, 3.2, 3.3, 3.9,
EXTRA: 3.1,
DESAF: 3.1,
EXEMPLOS: 3.1 ao 3.19.