Aula 16 (02/10)

Transformações Lineares e Bases.

Como construir uma transformação linear?

Teorema: Sejam U, V espaços vetoriais, $\{u_1, \dots, u_k\} = \beta$ base de U, $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ quaisquer. Então existe única transformação linear $T: U \to V$ tal que

$$T(u_1) = v_1, \quad \dots, \quad T(u_k) = v_k$$

Dem: Vamos construir explicitamente T. Seja $u \in U$. Como β é base de U, $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$.

Queremos construir T linear. Então defina

$$T(u) = T(a_1 u_1 + \dots + a_k u_k) = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k.$$

Desta forma T está definida $\forall u \in U$ e T é linear.

(exercício: verificar que realmente T é linear).

Para ver que T é única, suponha que $\tilde{T}: U \to V$ satisfaz $\tilde{T}(u_1) = v_1, \dots, \tilde{T}(u_k) = v_k$ e $\tilde{T}$ é linear.

Então para $u \in U$ genérico, $u = a_1u_1 + \dots + a_k u_k$ e portanto

$$\begin{aligned}\tilde{T}(u) &= \tilde{T}(a_1u_1 + \dots + a_k u_k)\\ &= a_1\tilde{T}(u_1) + \dots + a_k\tilde{T}(u_k)\\ &= a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = T(u).\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{T}(u) = T(u)$ $\forall u \in U$, ou seja, $\tilde{T} = T$. ■

Provaremos o Teorema do Núcleo-Imagem:

<u>Teorema</u>: $T: U \to V$ linear. Então

$$\dim U = \dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim \mathrm{Im}(T).$$

<u>Dem</u>: Considere que $\dim U = n$, $\dim \mathrm{Nuc}(T) = k$. Mostraremos que $\dim \mathrm{Im}(T) = n-k$. Seja $\beta = \{u_1, \dots, u_k\}$ base de $\mathrm{Nuc}(T)$. Acrescente $n-k$ vetores de modo a obter uma base de U:

$$\gamma = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\} \text{ base de } U.$$

Como $T(u_1) = \dots = T(u_k) = 0$ e γ é base de U, então

$$\begin{aligned}T(u) &= T(a_1u_1 + \dots + a_n u_n)\\ &= a_1T(u_1) + \dots + a_nT(u_n)\\ &= a_{k+1}T(u_{k+1}) + \dots + a_nT(u_n).\end{aligned}$$

Em outras palavras: $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{T(u_{k+1}), \dots, T(u_n)\}$.

Vamos mostrar que $\{T(u_{k+1}), \dots, T(u_n)\}$ é LI:

se $b_{k+1}, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$b_{k+1}T(u_{k+1}) + \dots + b_n T(u_n) \overset{\circledast}{=} 0, \text{ então}$$

$$T(b_{k+1}u_{k+1} + \dots + b_n u_n) = 0 \text{ e portanto}$$

$b_{k+1}u_{k+1} + \dots + b_n u_n \in \operatorname{Nuc}(T)$. Como β é base

de $\operatorname{Nuc}(T)$, existem $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tais que

$b_{k+1}u_{k+1} + \dots + b_n u_n = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k$. Logo

$c_1 u_1 + \dots + c_k u_k - b_{k+1}u_{k+1} - \dots - b_n u_n = 0$. Como

γ é base, $c_1 = \dots = c_k = b_{k+1} = \dots = b_n = 0$.

Como concluímos que $b_{k+1} = \dots = b_n = 0$, a comb. linear

$\circledast$ tem necessariamente coefs nulos, ou seja,

$\{\underbrace{T(u_{k+1}), \dots, T(u_n)}_{n-k \text{ vetores}}\}$ é LI. Logo $\dim \operatorname{Im}(T) = n-k$.

<u>Exemplo</u>: Encontre a T. Linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,0,1)$ e $T(1,-1) = (-2,0,-2)$.

<u>Sol</u>: $\{(1,1),(1,-1)\}$ e' base de $\mathbb{R}^2$. Então um vetor genérico (x,y) é C.L dessa base:

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1).$$ Logo,

$$T(x,y) = T\left(\frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)\right)$$

$$= \frac{x+y}{2}T(1,1) + \frac{x-y}{2}T(1,-1) =$$

$$= \frac{x+y}{2}(1,0,1) + \frac{x-y}{2}(-2,0,2) = \left(\frac{-x+3y}{2}, 0, \frac{-x+3y}{2}\right).$$

Portanto $T(x,y) = \left(\frac{-x+3y}{2}, 0, \frac{-x+3y}{2}\right)$.

Observe que $T(x,y) = \left(\frac{-x+3y}{2}\right)(1,0,1)$. Portanto

$Nuc(T) = span\{(3,1)\}$, $Im(T) = span\{(1,0,1)\}$.

<u>Obs</u>: Se definirmos $\tilde{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por

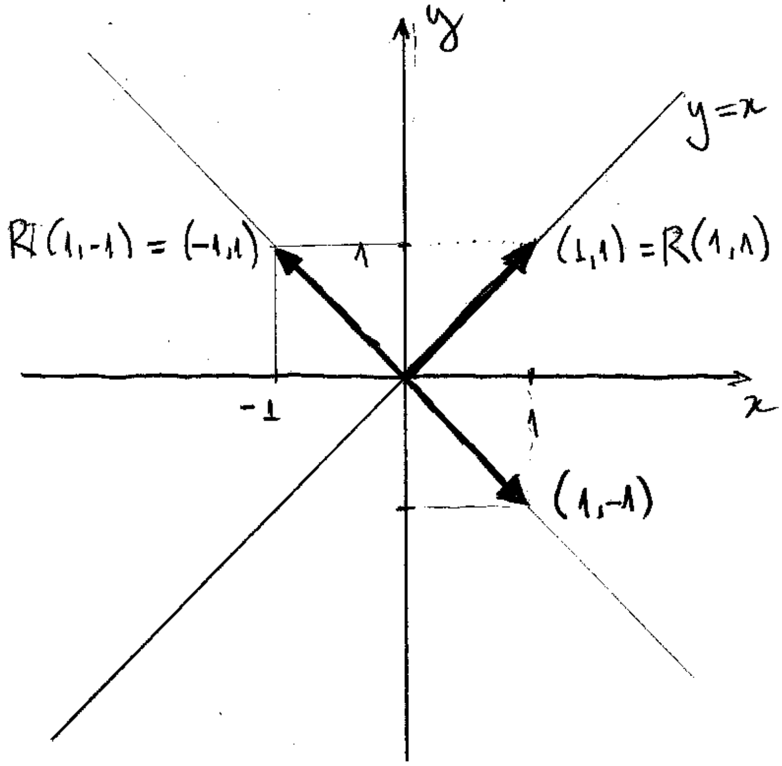
$$\tilde{T}(1,1) = (1,0,1),\ \tilde{T}(3,1) = (0,0,0),$$

então $\tilde{T} = T$, pois $\tilde{T}$ e T coincidem na base $\{(1,1),(3,1)\}$. (ver o 1º teorema da aula).

<u>Exemplo</u>: Encontrar $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$R(1,1) = (1,1) \text{ e } R(1,-1) = (-1,1)$$

<u>Sol</u>: Novamente:
$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1). \text{ Então}$$

$$R(x,y) = \frac{x+y}{2}R(1,1) + \frac{x-y}{2}R(1,-1)$$
$$= \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(-1,1) = (y,x)$$



Geometricamente, R é a <u>reflexão</u> em torno da reta $y=x$. (também conhecida como <u>espelhamento</u> em torno da reta $y=x$)