Aula 15 (30/09)

Teorema do Núcleo-Imagem; composição de TL's.

Teorema: Seja $T: U \to V$ uma transformação linear. Então $Nuc(T)$ e $Im(T)$ são subespaços vetoriais de U e V respectivamente.

Dem: Núcleo: • $0 \in Nuc(T)$, pois $T(0)=0$.

• se $u_1, u_2 \in Nuc(T)$, então $T(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$. Logo $u_1 + u_2 \in Nuc(T)$

• se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in Nuc(T)$, então $T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda \cdot 0 = 0$. Logo $\lambda u \in Nuc(T)$.

Imagem: • $0 \in Im(T)$, pois $T(0)=0$.

• se $v_1, v_2 \in Im(T)$, então existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$, $T(u_2) = v_2$. Logo, $v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1+u_2)$ e então v_1+v_2 pertence a $Im(T)$.

• se $v \in Im(T)$, então existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Logo, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\lambda v = \lambda T(u) = T(\lambda u)$. Portanto, $\lambda v \in Im(T)$. ■

Nos exemplos da aula passada:

Ex 1: $\dim Nuc(T) + \dim Im(T) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

Ex 2: $\dim Nuc(D) + \dim Im(D) = 1 + 3 = 4 = \dim(P_3)$

Ex 3: $\dim Nuc(T) + \dim Im(T) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

Ex 4: $\dim Nuc(F) + \dim Im(F) = 3 + 1 = 4 = \dim(M_{2\times 2})$

Isso acontece sempre:

Teorema (Núcleo-Imagem): Seja $T: U \to V$ uma transf linear. Então

$$\boxed{\dim Nuc(T) + \dim(Im\,T) = \dim U.}$$

Algumas conseqüências desta fórmula:

Conseq. 1: $T: U \to V$ linear e $\dim U > \dim V$.

Então T não é injetiva.

Dem: Vamos mostrar que $\dim Nuc(T) > 0$.

De fato, $\dim U = \dim Nuc(T) + \dim Im(T)$

$\leq \dim Nuc(T) + \dim V$. Logo

$\dim U - \dim V \leq \dim Nuc(T)$. Como $\dim U > \dim V$, então $\dim U - \dim V > 0$ e portanto $\dim Nuc(T) > 0$.

Conseq. 2: $T: U \to V$ linear e $\dim U < \dim V$.

Então T não é sobrejetiva.

Dem: exercício (IMPORTANTE!!!)

Conseq. 3: $T: U \to V$ linear e $\dim U = \dim V$.

Então T é injetiva se e só se T é sobrejetiva.

Dem: exercício (IMPORTANTE!!!)

Composição de Transformações lineares

Def: $f: X \to Y$ e $g: Y \to W$ funções. A função composta $g \circ f : X \to W$ é dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Teorema: Sejam $T: U \to V$ e $S: V \to W$ transf. lineares. Então $S \circ T : U \to W$ é linear.

Dem: $(S \circ T)(u_1 + u_2) = S(T(u_1 + u_2)) =$

$= S(T(u_1) + T(u_2)) =$

$= S(T(u_1)) + S(T(u_2)) = (S \circ T)(u_1) + (S \circ T)(u_2)$. OK p/ soma

$$(S \circ T)(\lambda u) = S(T(\lambda u)) = S(\lambda T(u))$$
$$= \lambda S(T(u)) = \lambda (S \circ T)(u)$$ ok p/ produto.

Exemplo: $T: P_2 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e

$S: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} -p(1) & 0 \\ 0 & p(-1) \end{bmatrix} \text{ e } S(A) = tr(A).$$

1) Quem é $S \circ T : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$?

$$(S \circ T)(a+bx+cx^2) = S(T(a+bx+cx^2))$$
$$= S\left(\begin{bmatrix} -a-b-c & 0 \\ 0 & a-b+c \end{bmatrix}\right) = -2b.$$

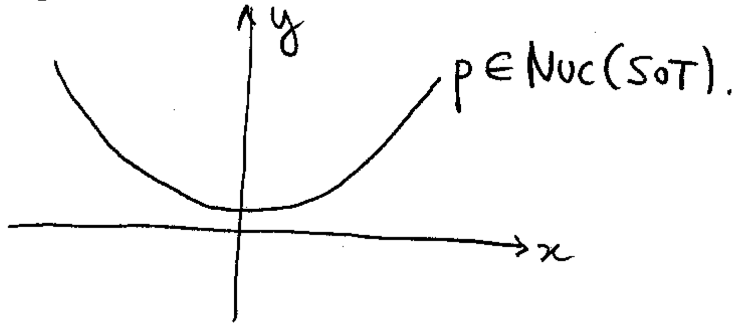
2) $Nuc(S \circ T) = ?$

Quem são $p \in P_2$ tais que $(S \circ T)(p) = 0$?

$-2b = 0 \Rightarrow b = 0$. Então

$$Nuc(S \circ T) = \{ a + cx^2 \;/\; a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Então $Nuc(S \circ T)$ são exatamente os polinômios de grau 2 cujos gráficos são simétricos com respeito ao eixo y:



Em outras palavras, $Nuc(S \circ T)$ são os $p \in P_2$ que são <u>funções pares</u>, ou seja, que satisfazem

$$\boxed{p(x) = p(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

2) $S \circ T$ é sobrejetiva? Sim, pois
$(S \circ T)(a + bx + cx^2) = -2b \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

3) Observe que $\dim Nuc(T) = 2$, $\dim Im(T) = 1$
e $\dim P_2 = 3$. ∎

<u>Exemplo:</u> $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2$ e $S: P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
dadas por $T(a,b,c) = a + bx + \frac{c}{2}x^2$ e
$$S(p) = (p(0), p'(0), p''(0)).$$

1) Quem é $S \circ T$?

$$(S \circ T)(a,b,c) = S(T(a,b,c)) = S\left(a + bx + \frac{c}{2}x^2\right)$$

Mas se $p(x) = a + bx + \frac{c}{2}x^2$, então $p(0) = a$ e

$p'(x) = b + cx \implies p'(0) = b$

$p''(x) = c \implies p''(0) = c$.

Portanto $S(a+bx+cx^2) = (a,b,c)$ e então

$$\boxed{(S\circ T)(a,b,c) = (a,b,c)}$$

Em outras palavras: $S\circ T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação identidade. ∎

Def: Seja $T: U \longrightarrow V$ linear. Dizemos que T é inversível se existe $S: V \longrightarrow U$ linear tal que $S\circ T = Id$.

Notação: $S = T^{-1}$.

Observe portanto que, no exemplo anterior, se $T(a,b,c) = a+bx+cx^2$, então T é inversível e sua inversa é $S(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$. ∎