Aula 13 (23/09)

Funções e Transformações Lineares.

Uma função consiste de 3 ingredientes:

1) Um conjunto X, a ser chamado domínio

2) Um conjunto Y, a ser chamado contra-domínio

3) Uma regra de associação f,

satisfazendo à condição: para cada $x \in X$, existe um único elemento $y \in Y$ relacionado a x. Este elemento será denotado por $f(x)$.

Notação: $f: X \longrightarrow Y$
$$x \longmapsto f(x)$$

Exemplos de não funções

1) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ (ñ é verdade que para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ associado - p/ $x = 0$ falha).

2) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $x \longmapsto$ soluções em y da equação $|x| = |y|$

(ñ é verdade que para cada $x \in X$ existe um único $y \in Y$ relacionado a x. Por exemplo, para $x = 1$, os y's associados são 1 e -1. Mas p/ $x = 0$ é verdade).

Exemplos de funções

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (notação p/ a regra: $f(x) = x^2$)
$x \longmapsto x^2$

4) $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

5) $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto x^2$

6) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(s,t) \longmapsto s(1,1,0) + t(0,1,-1)$
(ou $T(s,t) = s(1,1,0) + t(0,1,-1)$)

7) $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(a,b,c) = a(1,0) + b(0,1) + c(1,1)$.

Definições: Sejam $f: X \to Y$, $x \mapsto f(x)$; $g: X' \to Y'$, $x' \mapsto g(x')$ funções.

1) A imagem de f é o conjunto
$$\text{Im}(f) = \{ f(x) ;\ x \in X \}.$$

2) f é **injetiva** se sempre que $f(x_1) = f(x_2)$ ocorrer como conseqüência que $x_1 = x_2$.

3) f é **sobrejetiva** se $Im(f) = Y$.

4) f é **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva.

5) dizemos que as funções f e g são iguais quando $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ **para todo** $x \in X$.

Nos exemplos anteriores:

3) f não é injetiva, pois $f(1) = f(-1)$ e $1 \neq -1$
f não é sobrejetiva, pois $f(x) \neq -3$, para todo x

4) f é injetiva
f não é sobrejetiva

5) f é injetiva
f é sobrejetiva
f é bijetiva

6) T é injetiva. De fato, se $T(s,t) = T(s',t')$, então $s(1,1,0) + t(0,1,-1) = s'(1,1,0) + t'(0,1,-1)$
e portanto $(s-s')(1,1,0) + (t-t')(0,1,-1) = (0,0,0)$
Como $\{(1,1,0),(0,1,-1)\}$ é LI, $s = s'$, $t = t'$
e então $(s,t) = (s',t')$.

T não é sobrejetiva. Realmente, pois $Im(T) = \{s(1,1,0) + t(0,1,-1), s,t\}$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ e portanto $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$.

7) F não é injetiva, pois $F(a,b,c) = F(a',b',c')$

$\Longleftrightarrow (a-a')(1,0) + (b-b')(0,1) + (c-c')(1,1) = (0,0)$

não implica $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, já que $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ é LD.

F é sobrejetiva, pois

$Im(F) = \{a(1,0) + b(0,1) + c(1,1) ;\ a,b,c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

<u>Def</u>: Uma <u>transformação linear</u> é uma função

$T: U \longrightarrow V$, com U, V espaços vetoriais,

que satisfaz:

1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $\forall u,v \in U$

2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall u \in U$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.