Aula 12 (18/09)

Interseção e Soma de subespaços - II

Ex 1: $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - y = 0\}$

a) $\dim U$:

$$x = -y - z \Rightarrow (-y-z, y, z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$$

Como $(-1,1,0), (-1,0,1)$ LI's e

$U = \text{span}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$, $\boxed{\dim U = 2}$

b) $\dim V$:

$$y = 2x \Longrightarrow (x, 2x, z) = x(1,2,0) + z(0,0,1)$$

Como $(1,2,0), (0,0,1)$ LI's e $\text{span}\{(1,2,0),(0,0,1)\} = V$,

temos $\boxed{\dim V = 2}$

c) $U \cap V$:

$$x = -y - z = -2x - z \Rightarrow z = -3x \text{ e } y = 2x.$$

Então $(x, 2x, -3x) = x(1,2,-3)$. Portanto

$U \cap V = \text{span}\{(1,2,-3)\}$ e $\boxed{\dim(U \cap V) = 1}$

d) $U+V$:

$$U+V = \text{span}\{\overbrace{(-1,1,0),(-1,0,1)}^{\text{geradores de } U}, \overbrace{(1,2,0),(0,0,1)}^{\text{geradores de } V}\}$$

Os geradores não são LJ's:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2 - \ell_3/3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto: $U+V = \text{span}\{(-1,0,0),(0,3,0),(0,0,1)\}$
$= \mathbb{R}^3$ e então

$$\boxed{\dim U+V = 3}$$

e) Observe que $\dim U + \dim V \neq \dim(U+V)$, mas vale

$$\dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = \dim(U+V)$$
$$2 + 2 - 1 = 3$$ ■

Essa relação entre dimensões vale em geral.

<u>Teorema</u>: Sejam $(V,+,\cdot)$ espaço vetorial, $H, K \subset V$ subespaços. Então

$$\dim(H+K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K).$$

Ex 2: $H = \{ A \in M_{2\times2} \,/\, a_{21} = 0 \}$ (triang. superior)

$K = \{ A \in M_{2\times2} \,/\, a_{12} = 0 \}$ (triang. inferior)

a) dim H:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in H$ se e só se $c = 0$; portanto:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LI's

Assim, $H = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\dim H = 3}$

b) dim K:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K$ se e só se $b = 0$; portanto:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim: $K = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Longrightarrow \boxed{\dim K = 3}$

c) H + K:

$$H + K = \text{span}\left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{geradores de } H}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

geradores de K.

Portanto $H+K = M_{2\times 2}$ e então $\dim(H+K)=4$.

d) $H\cap K$: Pelo teorema, já sabemos que

$$\dim(H\cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H+K)$$
$$\dim(H\cap K) = 3+3-4 = 2.$$

Vamos encontrar explicitamente $H\cap K$:

$A\in H\cap K$ se, e só se, $A\in H$ e $A\in K$. Então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Assim: $H\cap K = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (diagonais)

e $\dim(H\cap K)=2$. ∎

Uma conseqüência do teorema: subespaços "muito grandes" tem intersecção de dimensão maior que zero.

Formalmente: Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial de dimensão n, H,K subespaços tais que $\dim H > \frac{n}{2}$, $\dim K > \frac{n}{2}$. Então a intersecção $H\cap K$ tem dimensão ≥ 1.

Demonstração: $\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H+K)$

$$> \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - \dim(H+K)$$

Mas $\dim(H+K) \leq n \Rightarrow -\dim(H+K) \geq -n$

Então $\dim(H \cap K) > n - n = 0$, ou seja,
$\dim(H \cap K)$ é pelo menos 1 (ao menos uma reta). ■

Relembre: Def: Se $V = H + K$ e $H \cap K = \{0\}$, dizemos que V é soma direta de H e K.
Notação: $V = H \oplus K$.

Ex3: $H = \{A \in M_{2\times 2} \,/\, A^T = A\}$ (simétricas)
$K = \{A \in M_{2\times 2} \,/\, A^T = -A\}$ (antissimétricas)

a) $\dim H = 3$ (exercício)

b) $\dim K = 1$ (exercício)

c) $H + K = M_{2\times 2}$

* $H + K \subset M_{2\times 2}$ ok!

* $H + K \supset M_{2\times 2}$ é a parte difícil. Precisamos mostrar que toda matriz 2×2 é soma de uma simétrica e uma anti-simétrica.

Se fosse verdade, então $A \in M_{2\times 2}$, $\boxed{A = A_1 + A_2}$ ☆

com $A_1 \in H$, $A_2 \in K$. Vamos descobrir quem devem ser A_1 e A_2:

$$A^T = A_1^T + A_2^T \Longrightarrow \boxed{A^T = A_1 - A_2} \text{ ☠}:$$

$$\text{☆} + \text{☠} \Longrightarrow A + A^T = 2A_1 \longrightarrow A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$\text{☆} - \text{☠} \Longrightarrow A - A^T = 2A_2 \Longrightarrow A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Então: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

Exercício: verifique que $\frac{1}{2}(A + A^T) \in H$; $\frac{1}{2}(A - A^T) \in K$.

d) $H \cap K$: Se $A^T = A$ e $A^T = -A$, então $A = 0$!

(exercício: provar esta afirmação).

Portanto: $H \cap K = \{0\}$. e $\dim(H \cap K) = 0$.

Conclusão: $\boxed{M_{2\times 2} = H \oplus K}$