Aula 10 (11/09): Dúvidas e exercícios.

Aula 11 (16/09)

Independência linear, bases e dimensão

Def: $(V, +, \cdot)$ espaço vetorial. Os vetores $u_1, \dots, u_k \in V$ são linearmente independentes (LI's) se $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0$ só quando $t_1 = \dots = t_k = 0$.

Ex 1: Verifique que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ são linearmente independentes.

Sol: $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$.

Quais são as soluções p/ a, b, c?

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então a única solução é $a = b = c = 0$. ∎

Ex 2: Verifique que $\{x-2, x(x-2)\}$ é um conjunto LI.

Sol: $a(x-2)+b[x(x-2)]=0$? (Quem é esse "0"?).

$$a(x-2)+b[x(x-2)] = ax-2a+bx^2-2bx$$
$$= -2a+(a-2b)x+bx^2$$
$$= 0+0x+0x^2$$

A única solução é $a=b=0$. ∎

Ex 3: Os polinômios $x-2$, x^2-4, x^2-2x são linearmente independentes?

Sol: $a(x-2)+b(x^2-4)+c(x^2-2x) = 0+0x+0x^2$

$$(b+c)x^2+(a-2c)x+(-2a-4b) = 0+0x+0x^2$$

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-2c=0 \\ -2a-4b=0 \end{cases}$$

continha (...)

As soluções são $(2c,-c,c)$, para todo $c\in\mathbb{R}$. ∎

A noção de "tamanho" de espaços $\mathbb{R}^n$ e de seus subespaços é dimensão. A mesma noção existe para espaços vetoriais gerais.

<u>Def</u>: O conjunto ordenado $\{u_1, \dots, u_k\} \subset V$ é uma <u>base de V</u> se

- $\text{span}\{u_1, \dots, u_k\} = V$
- $\{u_1, \dots, u_k\}$ é LI.

O número k é a dimensão de V.
Notação: $\dim V = k$.

<u>Obs</u>: a definição acima implica que $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ e $\{u_2, u_1, \dots, u_k\}$ etc são <u>bases diferentes</u>, embora $\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\} = \text{span}\{u_2, u_1, \dots, u_k\}$.

<u>Ex 4</u>: Do exemplo 1, concluímos que sendo
$$V = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$ então
$\dim V = 3$. Observe que
$$V = \{ A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A \}.$$

Exercício: Mostre que realmente $V = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$

<u>Ex 5</u>: Seja $W = \{ p \in P_2 \mid p(2) = 0 \}$. Calcule a dimensão de W.

Sol: vamos encontrar polinômios, linearmente independentes capazes de gerar W.

Como os elementos de W são polinômios de grau 2 que se anulam em $x=2$, eles são divisíveis por $(x-2)$. Então, dado $p \in W$, existe uma fatoração de p no formato

$$p(x) = (x-2)(a+bx).$$

Então
$$\begin{aligned} p(x) &= ax - 2a + b.x(x-2) \\ &= a(x-2) + b.x(x-2). \end{aligned}$$

Isso mostra que todo $p \in W$ é C.L. de $x-2$ e $x(x-2)$.
Em outras palavras: $W \subset \text{span}\{x-2, x(x-2)\}$.
(pq $W \supset \text{span}\{x-2, x(x-2)\}$?). Portanto $W = \text{span}\{x-2, x(x-2)\}$.
Pelo exemplo 2, $x-2$ e $x(x-2)$ são LI's. Assim:

$$\dim W = 2.$$

∎

Uma propriedade <u>fundamental</u> das bases:

<u>Teorema</u>: Se $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é base do espaço vetorial V, então para cada $u \in V$ existe uma única C.L. de $u_1, \ldots, u_k$ tal que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k = u.$$

<u>Dem</u>: Considere duas combinações lineares de $u_1, \dots, u_k$ que resultam em u:

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = u \quad \text{e}$$
$$b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = u. \quad \text{Então}$$

$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = b_1 u_1 + \dots + b_k u_k$. Logo $(a_1 - b_1) u_1 + \dots + (a_k - b_k) u_k = 0$. Como $\{u_1, \dots, u_k\}$ é base de V, $\{u_1, \dots, u_k\}$ é LI.

Portanto: $\quad a_1 - b_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = b_1$

$$\vdots$$

$\quad a_k - b_k = 0 \Longrightarrow a_k = b_k$. Assim, as duas C.L's são na verdade a mesma. ∎

<u>Def</u>: Seja $\beta = \{u_1, \dots, u_k\}$ uma base de V e $v \in V$. Os coeficientes $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ (únicos, pelo teorema acima) tais que $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$ são chamados de <u>coordenadas de u na base β</u>.

Notação: $(v)_\beta = (a_1, \dots, a_k)$ ou $(v)_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$.

Obs: por causa da definição de coordenadas é que exigimos que uma base seja ordenada. Em outras palavras, se $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ e

$\beta' = \{u_2, u_1, \dots, u_k\}$, então

$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$ tem coordenadas diferentes nas bases β e β':

$$(v)_\beta = (a_1, a_2, \dots, a_k), \quad (v)_{\beta'} = (a_2, a_1, \dots, a_k).$$

Ex 6: Se $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ no exemplo 4, então $\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right)_\beta = (2, -1, 4)$.

Ex 6: Se $\beta = \{x-2, x(x-2)\}$ no exemplo 5, então

$(3x^2 - x - 10)_\beta = (5, 3)$. De fato: vamos encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(x-2) + bx(x-2) = 3x^2 - x - 10.$$

$$bx^2 + (a-2b)x + (-2a-2b) = 3x^2 - x - 10$$

$$\Rightarrow b = 3, \ a = 5 \ \text{(conferir!)}$$