Aula 8 (04/09)

Espaços de Polinômios

$$\mathcal{P}_n = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \ / \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, 1, \dots, n \}$$

Operações entre polinômios:

SOMA: $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$

$$(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_n+b_n)x^n$$

MULT. $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda p)(x) = \lambda a_0 + (\lambda a_1)x + \dots + (\lambda a_n)x^n$.

Exercício: Mostrar que $\mathcal{P}_n$ com essas operações é um espaço vetorial.

Obs: Quando dois elementos de $\mathcal{P}_n$ são iguais?

$p, q \in \mathcal{P}_n$ são iguais se e somente se $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$.

Observe que $\text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\} = P_n$

Há outras formas de gerar P_n ?

<u>Exemplo</u>: Mostre que $\text{span}\{2, 1+x, 1+x^2\} = P_2$.

sol. Dado um polinômio genérico $p \in P_2$, então $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. É possível escrever p como C.L. de $2, 1+x, 1+x^2$?

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = b_0(2) + b_1(1+x) + b_2(1+x^2)$$
$$= 2b_0 + b_1 + b_2 + b_1 x + b_2 x^2.$$

Então $\begin{cases} 2b_0 + b_1 + b_2 = a_0 \\ b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 \end{cases}$ e esse sistema sempre tem solução para qualquer a_0, a_1, a_2.

<u>Alguns subespaços de P_n</u>.

<u>Exemplo</u>: $W = \{ p \in P_2 \,/\, p(2) = 0 \}$ é subespaço vetorial de P_2.

- O polinômio nulo está em W?

Sim, pois o polinômio nulo se anula em $x=2$.

- $p, q \in W \implies p+q \in W$?

sim, pois $(p+q)(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0$

- $\lambda \in \mathbb{R},\ p \in W \implies \lambda p \in W$?

sim, pois $(\lambda p)(2) = \lambda p(2) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Encontrando um gerador de W:

Seja $p \in W$ genérico. Então, como $p(2) = 0$, p é divisível por $(x-2)$, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = (x-2)(a+bx)$$
$$= a(x-2) + bx(x-2)$$

Portanto, $W = \operatorname{span}\{(x-2), x(x-2)\}$.

<u>Obs importante</u>: Fixe $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que

$$P_n = \operatorname{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

Note que $P_1 \subset P_2$, pois se $p \in P_1$, então $p(x) = a_0 + a_1 x = a_0 + a_1 x + 0x^2$. Analogamente, $P_2 \subset P_3$ etc. Isso é bem diferente do que ocorre com $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ para $m<n$.

Não é verdade que $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ para $m<n$, mas é verdade que $P_m \subset P_n$ se $m<n$.

De fato, P_m é subespaço vetorial de P_n se $m<n$.