Aula 5 (26/08)

Soluções de sistemas lineares e aplicações.

Vimos: o produto de matrizes permite traduzir sistemas ~~na~~ para a linguagem matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \xleftrightarrow{\text{PRODUTO DE MATRIZES}} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Como resolver um sistema?

Escalonamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operações elementares com linhas}} \left[\begin{array}{ccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{?} & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & \tilde{b}_n \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{l} \tilde{a}_{11}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{mn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_n \end{array}$$

Subst de baixo p/ cima (seria ideal ...)

O que são operações elementares

(1) Trocar as linhas i e j ($l_i \longleftrightarrow l_j$)

(2) multipl. a linha i por $k \neq 0$ ($l_i \leftarrow k \cdot l_i$)

(3) subst. a linha i por $l_i + k l_j$ ($l_i \leftarrow l_i + k l_j$)

(4) Descartar linha de zeros

Exemplo 1: Escreva o vetor $(8,5,1) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear de $(1,1,2)$, $(-1,-1,1)$ e $(2,1,-1)$

Sol: Encontrar $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$x(1,1,2) + y(-1,-1,1) + z(2,1,-1) = (8,5,1)$$

sistema
$$\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

MATRIZ ESTENDIDA:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

1°) $l_2 \longleftarrow (-1)\cdot l_2 + l_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

2°) $l_2 \longleftrightarrow l_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

3°) $l_2 \longleftarrow (-2)l_1 + l_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

O sistema agora é:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ 3y - 5z = -15 \\ z = 3 \end{cases}$$

Retrossubstituição

$\underset{3^a\ eq}{\boxed{z = 3}} \Longrightarrow \underset{2^a\ eq}{\boxed{y = 0}} \Longrightarrow \underset{1^a\ eq.}{\boxed{x = 2}}$

Assim,

$$(8,5,1) = 2.(1,1,2) + 0.(-1,-1,1) + 3(2,1,-1)$$

Observe que na verdade

$$(8,5,1) \in \text{span}\{(1,1,2), (2,1,-1)\} \quad pq$$

a coordenada na direção de $(-1,-1,1)$ é <u>nula</u>.

<u>Exemplo 2</u>: Encontre os pontos de intersecção dos planos

$$\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y = 7\}$$

$$\pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ y + z = 4\}$$

$$\pi_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = 1\}$$

<u>Sol</u>: são os $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que simultaneamente

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y = 7 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \leftarrow (-1)\ell_1 + \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \leftarrow (-\ell_2) + \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 6 \\ 2z = -2 \end{cases}$$

Então $\boxed{z = -1} \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{x = -3} \Rightarrow$ O ponto é $(-3, 5, -1)$.

Vimos exemplos de sistemas de equações com solução <u>única</u>. Há sistemas com <u>infinitas</u> soluções e com <u>nenhuma</u> solução.

<u>Ex</u>: De quantas maneiras podemos escrever $(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear de $(1,2,1,2)$, $(-1,0,1,-1)$ e $(0,2,2,1)$?

<u>Sol</u>: Procuraremos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,2,1,2) + b(-1,0,1,-1) + c(0,2,2,1) = (0,0,0,0)$$

sistema: $\begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{l_4 \leftarrow -l_2 + l_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \leftarrow -l_1 + l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{l_4 \leftarrow 2l_4 + l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{última}]{\text{elimina a}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{l_2 \leftarrow -2l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \leftarrow -l_2 + l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{a última}]{\text{elimina}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

Então $\boxed{a = b} \Rightarrow \boxed{c = -b}$. Há portanto infinitas maneiras de escrever $(0,0,0,0)$ como C.L dos vetores dados:

$$(0,0,0,0) = a(1,2,1,2) + a(-1,0,1,-1) - a(0,2,2,1).$$

Obs: O exemplo anterior mostra que o conjunto $\{(1,2,1,2), (-1,0,1,1), (0,2,2,1)\}$ é LD!

Ex: $(3,3,-3) \in \underbrace{(1,0,1) + \text{span}\{(1,1,1), (2,1,4)\}}$?

plano que passa por $(1,0,1)$ e é gerado por $(1,1,1)$ e $(2,1,4)$.

Sol: Devem existir $s, t \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(3,3,-3) = (1,0,1) + s(1,1,1) + t(2,1,4)$$

SISTEMA: $\begin{cases} s + 2t = 2 \\ s + t = 3 \\ s + 4t = -4 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \end{array}\right]$

1°) $l_3 \longleftarrow -l_1 + l_3$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

2°) $l_2 \longleftarrow -l_1 + l_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} s + 2t = 2 \\ -t = 1 \\ 2t = -6 \end{cases}$$

IMPOSSÍVEL

Então $(3,3,-3) \notin (1,0,1) + \text{span}\{(1,1,1),(2,1,4)\}$

Perguntas: Quantas soluções possíveis tem um sistema que, após escalonado, tem as seguintes formas matriciais:

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 8 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 3 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \blacksquare \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 2 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & \blacksquare \end{array}\right]$

Considere $\blacksquare \neq 0$