Aula 3 (19/08)

Combinações lineares e espaços gerados; vetores linearmente independentes.

<u>Def</u>: $u \in \mathbb{R}^n$ é <u>combinação linear</u> de $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ se existem $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = t_1 u_1 + \dots + t_k u_k = \sum_{j=1}^{k} t_j u_j$$

<u>Exemplos</u>: 2) $(1,-2,1)$ é combinação linear de $(1,-1,0)$, $(-2,0,1)$, $(1,1,1)$?

<u>Sol</u>. existem $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,-2,1) = t_1(1,-1,0) + t_2(-2,0,1) + t_3(1,1,1) \ ?$$

$$\begin{cases} t_1 - 2t_2 + t_3 = 1 \\ -t_1 + t_3 = -2 \\ t_2 + t_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{continhas} \dots} \begin{array}{l} t_1 = 8/3 \\ t_2 = -1/3 \\ t_3 = 4/3 \end{array}$$

<u>Conclusão</u>: $(1,-2,1)$ é comb. linear dos 3 vetores acima.

3) Sem fazer contas, responda se é possível $(1,2,-1)$ ser combinação linear de $(1,2,0)$ e $(-3,1,0)$.

Sol: Não, pois comb. lineares de $(1,2,0)$ e $(-3,1,0)$ só produzem vetores da forma $(x,y,0)$.

4) Mostre que todo vetor do plano x,z em $\mathbb{R}^3$ é combinação linear de $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$.

Sol: um vetor genérico do plano x,z tem a forma $(x,0,z)$. Então, devem existir t_1, t_2 tais que $(x,0,z) = t_1(1,0,1) + t_2(0,0,1)$

$$(*) \begin{cases} x = t_1 \\ z = t_1 + t_2 \end{cases}$$

Basta então que $t_1 = x$ e $t_2 = z - x$, ou seja, o sistema $(*)$ tem solução p/ qualquer vetor $(x,0,z)$.

<u>Def</u>: os vetores $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ são <u>linearmente independentes</u> se ao exigirmos $t_1 u_1 + \dots + t_k u_k = 0$ tenha-se como conclusão que $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$, ou seja:

$$\sum_{j=1}^{k} t_j u_j = 0 \implies t_j = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, k.$$

<u>Exemplo 5)</u> Mostre que $(1,-1,0)$, $(-2,0,1)$, $(1,1,1)$ são linearmente independentes.

<u>Sol</u>: $t_1(1,-1,0) + t_2(-2,0,1) + t_3(1,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} t_1 - 2t_2 + t_3 = 0 \\ -t_1 + t_3 = 0 \\ t_2 + t_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} t_2 = -t_3 \\ t_1 = t_3 \end{array}$$

e
$$\begin{aligned} t_1 - 2t_2 + t_3 &= t_3 - 2(-t_3) + t_3 \\ &= 4t_3 = 0 \implies t_3 = 0 \\ &\implies t_2 = 0 \\ &\implies t_1 = 0 \end{aligned}$$

Portanto são linearmente independentes.

<u>NOTAÇÃO</u>: L.I. ou LI

<u>Def</u>: se $u_1, \ldots, u_k$ <u>não são</u> linearmente indep., dizemos que são <u>linearmente dependentes</u> (LD).

<u>Ex 6</u> $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,1)$ são linearmente independentes?

<u>Sol</u>: $t_1(1,1) + t_2(2,-1) + t_3(3,1) = (0,0)$

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 0 \\ t_1 - t_2 + t_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 0 \\ -t_1 + t_2 - t_3 = 0 \end{cases}$$

$3t_2 + 2t_3 = 0 \Longrightarrow \boxed{t_2 = -\frac{2}{3}t_3}$ e subst. na 2^a eq.

$t_1 + \frac{2}{3}t_3 + t_3 = 0 \Longrightarrow \boxed{t_1 = -\frac{5}{3}t_3}$.

Portanto, se escolhermos $t_3 = 1$, $t_2 = -2/3$, $t_1 = -5/3$ temos

$1(1,1) - \frac{2}{3}(2,-1) - \frac{5}{3}(3,1) = (0,0)$ e então

eles são LD.

<u>Def</u>: O <u>espaço gerado</u> pelos vetores $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$

é o conjunto de todas as possíveis comb. lineares desses vetores, ou seja:

$$\underbrace{\text{span}\{u_1, \dots, u_k\}}_{\substack{\text{notação p/ o} \\ \text{espaço gerado por } u_1, \dots, u_k}} = \left\{ \sum_{j=1}^{k} t_j u_j \; ; \; t_j \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Ex 7</u> Pelo exemplo 4) da pg 16, o plano x,z de $\mathbb{R}^3$ é o <u>espaço gerado</u> por $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$, pois todo vetor do plano x,z é combinação linear de $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$.

<u>Ex 8</u>: O espaço gerado por <u>um</u> vetor $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo uma reta em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\text{span}\{v\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma reta.

Para que serve saber se vetores são LI's ou LD's?

Se $u_1, \dots, u_k$ é LD, há vetores "sobrando"

Lema: um conjunto $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é LD se e somente se algum vetor $\neq 0$ é comb. linear dos demais.

Demonstração: Se é LD, então

$$t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k = 0 \quad \text{com algum } t_j \neq 0.$$

Digamos que $t_1 \neq 0$. Então

$$u_1 = -\frac{t_2}{t_1} u_2 - \frac{t_3}{t_1} u_3 - \cdots - \frac{t_k}{t_1} u_k \quad \text{e}$$

portanto u_1 é comb. linear dos demais. Por outro lado se algum dos $u_1, \ldots, u_k$ é comb. linear dos demais, digamos u_1, então

$$u_1 = t_2 u_2 + \cdots + t_k u_k \quad \text{e então}$$

$$u_1 - t_2 u_2 - \cdots - t_k u_k = 0 \quad \text{sem que todos}$$

os coeficientes da combinação sejam nulos. Então $u_1, \ldots, u_k$ é LD. ∎

Podemos então <u>eliminar</u> vetores de um conjunto LD sem alterar o espaço gerado.

<u>Ex. 9:</u> $\text{span}\{(1,1),(2,-1)\} = \text{span}\{(1,1),(2,-1),(3,1)\}$

<u>Sol:</u> $1\cdot(1,1) - \frac{2}{3}(2,-1) - \frac{5}{3}(3,1) = (0,0)$

$\Rightarrow (1,1) = \frac{2}{3}(2,-1) + \frac{5}{3}(3,1)$. Podemos eliminar o vetor $(1,1)$.

<u>Definição:</u> o espaço gerado $H = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ <u>tem dimensão k</u> se $u_1, \dots, u_k$ são LI's.

<u>Ex:</u> $\text{span}\{(1,1),(2,-1),(3,1)\}$ tem dimensão 2.

<u>Sol:</u> pelo anterior, $\text{span}\{(1,1),(2,-1),(3,1)\} = \text{span}\{(2,-1),(3,1)\}$ e $(2,-1)$, $(3,1)$ são LI's (exercício: verificar que são mesmo LI's).