Aula 4 (21/08)

Operações com matrizes.

"Def": Uma matriz de m linhas e n colunas é uma tabela

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

de coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Obs: Interpretaremos, quando conveniente, vetores $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ como matrizes de n linhas e 1 coluna:

$$u = (u_1, \dots, u_n) \longleftrightarrow u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Notação: dados $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as matrizes de m linhas e n colunas $(m \times n)$ será denotado por $M_{m \times n}$. Assim, por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}.$$

Operações com matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

SOMA: $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$

PRODUTO POR $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} = A.\lambda$.

PRODUTO DE MATRIZES: $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\, b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\, b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\, b_{ip} \end{bmatrix}$$

e portanto $A \cdot B \in M_{m\times p}$.

<u>Obs</u> Em geral $A \cdot B \neq BA$ (Exercício: encontrar exemplos onde $A.B \neq BA$).

TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ : $A \in M_{m\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e portanto $A^T \in M_{n\times m}$. (TROCA LINHAS POR COLUNAS)

Algumas Propriedades das operações com matrizes.

1) $(A^T)^T = A$,

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

5) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Exercício: Verificar a 3) p/ $A \in M_{2\times 2}$ e $B \in M_{2\times 3}$

Sol: tome genericamente $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, calcule $(A \cdot B)^T$, depois $B^T \cdot A^T$ e compare os dois resultados.

Def. A matriz identidade $I \in M_{n\times n}$ é

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Exercício: Verificar que $\forall A \in M_{n \times n}$, vale

$$\boxed{A \cdot I = I \cdot A = A}$$

Matrizes e vetores de $\mathbb{R}^n$

No caso em que $A \in M_{m \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + \cdots + x_m a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \text{C.L. das colunas de } A!$$

Podemos interpretar $A \cdot x$ como: "A transforma o vetor x no vetor $A \cdot x$"

Em particular: um sistema linear tem uma <u>forma matricial</u>:

<u>Definição</u>: A <u>forma matricial</u> do sistema de equações $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

<u>Exemplo</u>

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Def</u>: O <u>produto interno</u> de $u, v \in \mathbb{R}^n$ é o número real

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i \quad \left(\text{matricialmente: } = [u_1 \ldots u_n] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u^T v \right)$$

u e v são <u>ortogonais</u> se $u \cdot v = 0$.