Aula 2 (14/08)

Retas e Planos em $\mathbb{R}^n$

Retas: Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Uma reta é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ da forma

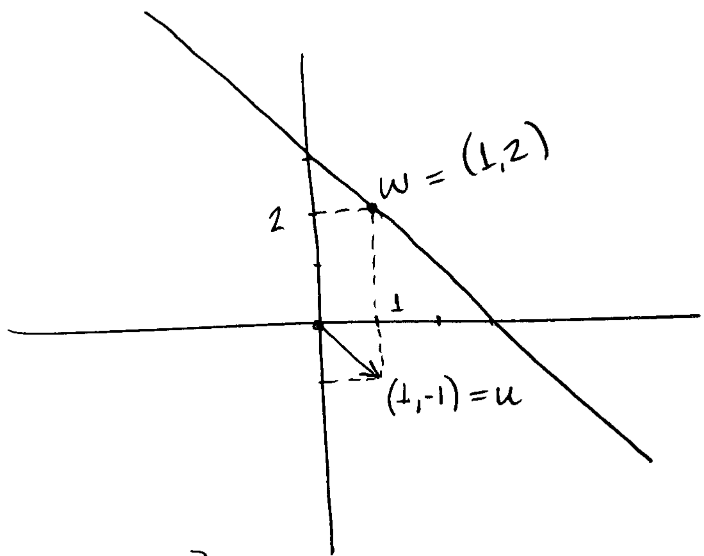
$$r = \{u \in \mathbb{R}^n \,/\, \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ com } u = tv + w\}$$

(equação paramétrica de uma reta)

Exemplos: 1) Em $\mathbb{R}^2$: $v = (1,-1)$
$w = (1,2)$

$$r_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 \,/\, \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ com } u = t(1,-1) + (1,2)\}$$

- $(2,1) \in r_1$?
- $(1,-1) \in r_1$?



$$r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 3\}$$

<u>Pergunta</u> : $r_1 = r_2$? Vejamos se $r_1 \subset r_2$ e $r_2 \subset r_1$

- $r_1 \subset r_2$: $u \in r_1 \Rightarrow u = (x,y) = t(1,-1) + (1,2)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 3$$

- $r_2 \subset r_1$: $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$. Logo, os pontos de r_2 têm a forma $(x, 3-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(x, 3-x) &= (x,-x) + (0,3) \\ &= x(1,-1) + (0,3) \quad \left(\neq t(1,-1) + (1,2)\right)\end{aligned}$$

Só conseguimos verificar que

$$r_2 \subset \{u \in \mathbb{R}^2 \,/\, \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ com } u = x(1,-1) + (0,3)\}.$$

Será que

$$\{u \in \mathbb{R}^2 / \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ com } u = x(1,-1) + (0,3)\} \subset r_1 \,?$$

A pergunta a ser feita é:

Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $u = x(1,-1) + (0,3)$, então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = t(1,-1) + (1,2)$?

$$x(1,-1) + (0,3) = t(1,-1) + (1,2)$$

$$\Longrightarrow (x-t)(1,-1) = (1,-1)$$

$$\Longrightarrow x - t = 1 \Longrightarrow \boxed{t = x - 1}$$

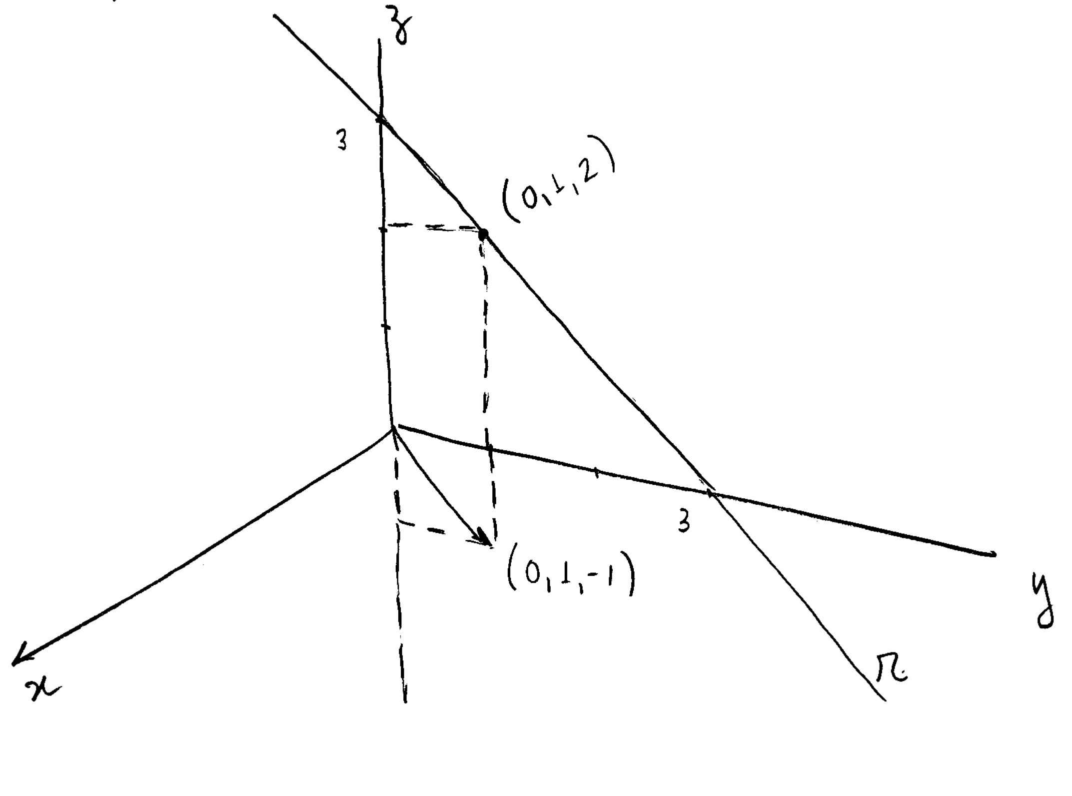
Verificamos: $r_1 \subset r_2$ e

$r_2 \subset r_1 \Longrightarrow r_1 = r_2$ ∎

2) Em $\mathbb{R}^3$: $v = (0,1,-1)$

$w = (0,1,2)$

$r = \{ u \in \mathbb{R}^3 \,/\, \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ com } u = t(0,1,-1) + (0,1,2) \}$



<u>Def:</u> Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que u e v são <u>paralelos</u> quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. (tb chamamos u e v de <u>múltiplos</u>).

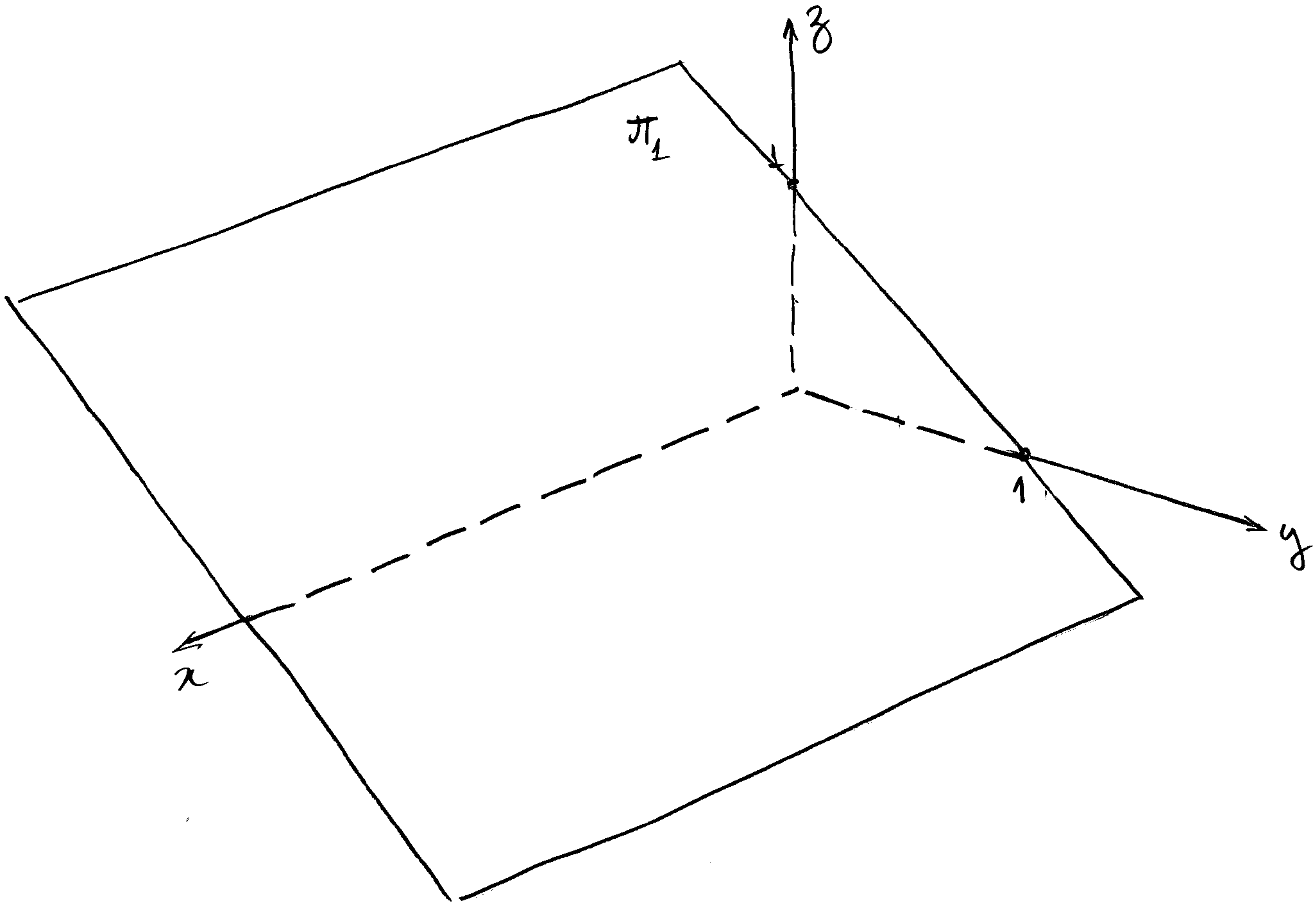
<u>Planos</u>: Sejam $v, w, p \in \mathbb{R}^n$, v e w não paralelos. Um <u>plano</u> é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\pi = \{ u \in \mathbb{R}^n \,/\, \text{existem } s, t \in \mathbb{R} \text{ com } u = sv + tw + p \}$$

<u>Exemplo:</u> 3) Em $\mathbb{R}^3$:
$$v = (0,-2,2)$$
$$w = (2,0,0)$$
$$p = (0,1,0)$$

$$\pi_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \text{existem } s,t \in \mathbb{R} \text{ com } (x,y,z) = s(0,-2,2) + t(2,0,0) + (0,1,0) \}$$

- $(2,-1,2) \in \pi_1$?
- $(0,0,0) \in \pi_1$?



$\pi_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y + z = 1 \}$

Pergunta: $\pi_1 = \pi_2$? Vejamos se $\pi_1 \subset \pi_2$ e $\pi_2 \subset \pi_1$

- $\pi_1 \subset \pi_2$: se $(x,y,z) \in \pi_1$, então existem s,t tais que $(x,y,z) = s(0,-2,2) + t(2,0,0) + (0,1,0)$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2s + 1 \\ z = 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y + z = 1}$$

Outra forma: $s(0,-2,2)+t(2,0,0)+(0,1,0)$

$$= (2t, -2s+1, 2s) = (x,y,z)$$

Como $\begin{cases} y = -2s+1 \\ z = 2s \end{cases}$, então $\boxed{y+z=1}$.

- $\pi_2 \subset \pi_1$: Se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaz $y+z=1$, então $y = 1-z$. Essa eq independe da variável x. Portanto, os pontos de π_2 são da forma

$$(x, 1-z, z) = x(1,0,0) + z(0,-1,1) + (0,1,0)$$
$$\overset{?}{=} s(0,-2,2) + t(2,0,0) + (0,1,0)$$

para algum $s,t \in \mathbb{R}$?

Exercício: verificar que p/ a equação acima (com ?) ser verdadeira basta que $t = x/2$ e $s = z/2$.