Aula 6 (28/08)

Sistemas lineares: aplicações

<u>Def</u>: Se $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ são LI's, dizemos que $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ tem <u>dimensão k</u>.

Notação: $\dim V = k$.

<u>Exemplos</u>: 1) $\text{span}\{(1,1,0), (2,0,2)\} \subset \mathbb{R}^3$ tem dimensão 2 (é um plano)

2) Se $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, então $\dim \text{span}\{v\} = 1$ (é uma reta).

<u>Exemplo 3</u>: Verifique que o conjunto de soluções do sistema abaixo é um espaço gerado e calcule sua dimensão.

$$\circledast \begin{cases} x - y - z + 2w = 0 \\ x + y + w = 0 \end{cases}$$

<u>Sol</u>: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$$l_2 \leftarrow l_2 - l_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então: $\begin{cases} x - y - z + 2w = 0 \\ 2y + z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{w = 2y + z}$

e $0 = x - y - z + 2(2y + z) = x - y - z + 4y + 2z$
$= x + 3y + z$

$\Rightarrow x = -3y - z$. Portanto as soluções são

da forma $(-3y - z, y, z, 2y + z)$

$= y(-3, 1, 0, 2) + z(-1, 0, 1, 1)$, para todo $y, z \in \mathbb{R}$.

Logo, o conjunto de soluções do sistema linear ✪ é

$$S = \text{span}\{(-3,1,0,2), (-1,0,1,1)\}.$$

Como $(-3,1,0,2)$, $(-1,0,1,1)$ são LI's, $\dim S = 2$. ∎

<u>Exemplo 4:</u> Em $\mathbb{R}^5$, verifique que sendo

$$A = \text{span}\{(1,2,0,2,1), (2,1,0,1,2), (2,2,2,2,2)\}$$

$$B = \text{span}\{(3,3,0,3,3), (4,3,2,3,4)\}$$

então $A \cap B$ é um espaço gerado e calcule sua dimensão.

Sol: Descreva A e B como sistemas lineares. Depois, resolve o sistema que é constituído desses dois sistemas:

• Cartesiana para A:

$$A = \{ s(1,2,0,2,1) + t(2,1,0,1,2) + r(2,2,2,2,2) \ / \ s,t,r \in \mathbb{R} \}.$$ Então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 2 & 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 \\ 2 & 1 & 2 & x_4 \\ 1 & 2 & 2 & x_5 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_5 \leftarrow \ell_5 - \ell_1]{\ell_4 \leftarrow \ell_4 - \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 2 & 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 \end{array}\right]$$

Portanto: $A = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \ / \ \begin{cases} x_4 - x_2 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 \end{cases} \right\}$

• Cartesiana para B:

$$B = \{ s(3,3,0,3,3) + t(4,3,2,3,4) \ / \ s,t \in \mathbb{R} \}.$$ Então

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & x_1 \\ 3 & 3 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 3 & 3 & x_4 \\ 3 & 4 & x_5 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_5 \leftarrow \ell_5 - \ell_1]{\ell_4 \leftarrow \ell_4 - \ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & x_1 \\ 3 & 3 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & x_5 - x_1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1 + \frac{\ell_3}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 + x_3/2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & x_5 - x_1 \end{array}\right].$$

Portanto:

$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \ / \ \begin{cases} x_2 - x_1 + x_3/2 = 0 \\ x_4 - x_2 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 \end{cases} \right\}$$

• Achando $A \cap B$:

$$\begin{cases} x_4 - x_2 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 - x_2 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{elimina eqs. repetidas}} \begin{cases} x_2 - x_1 + x_3/2 = 0 \\ x_4 - x_2 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 \end{cases}$$

que é o mesmo sistema que define B!

Então: $A \cap B = B$!

Obs: Sem fazer todas essas contas, já dava para saber que $A \cap B = B$:

$B \ni (3,3,0,3,3) = 1.(1,2,0,2,1) + 1(2,1,0,1,2)$

$B \ni (4,3,2,3,4) = 1(2,1,0,1,2) + 1.(2,2,2,2,2)$,

ou seja, $(3,3,0,3,3) \in A$ e também $(4,3,2,3,4) \in A$. Como A é um espaço gerado, contém todas as C.L. de $(3,3,0,3,3)$ e $(4,3,2,3,4)$, ou seja, $B \subset A$ e portanto

$$A \cap B = B.$$ ■

Obs: Ler pg. 55-56, 2.7 (definições e teorema 2.27)