Projeto de Apoio em Álgebra 2014.2 - Atividade 7

1. Três amigos (A), (B) e (C), estão sentados, lado a lado, em um banco de jardim. Sabe-se que:

   - (A) sempre fala a verdade;
   - (B) às vezes fala a verdade;
   - (C) nunca fala a verdade.

   O que está sentado à esquerda do banco diz: "(A) é quem está sentado no meio".
   O que está sentado no meio diz: "Eu sou (B)."
   O que está sentado à direita do banco diz: "(C) é quem está sentado no meio".

   Qual dos amigos está sentado no meio do banco?

2. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = (1,0)$, $T(1,1,0) = (2,0)$ e $T(0,1,1) = (2,1)$. Seja $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $L(x,y) = (x-y, 2x, 2y)$. Sejam ε_1 e ε_2 as bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

   (a) Apresente as matrizes $[T]_{\varepsilon_2 \leftarrow \varepsilon_1}$ e $[L]_{\varepsilon_1 \leftarrow \varepsilon_2}$.

   (b) Apresente $[T \circ L]_{\varepsilon_2}$ e $[L \circ T]_{\varepsilon_1}$

   (c) Apresente, se possível, $([T \circ L]_{\varepsilon_2})^{-1}$ e $([L \circ T]_{\varepsilon_1})^{-1}$.

3. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinômios de grau máximo 2. Seja a trasnformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(a\,X^2 + b\,X + c) = (a+c)\,X^2 + b$. Sejam $\alpha = \{1, X, X^2\}$ e $\beta = \{X^2 - 1, X + 1, 2\}$ bases de $\mathcal{P}_2$.

   (a) Determine uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$.

   (b) Apresente dois elementos pertencentes ao $\mathrm{Nuc}(T)$.

   (c) T é sobrejetora? Justifique.

   (d) Apresente as matrizes $[T]_\alpha, [T]_\beta, [T]_{\alpha\leftarrow\beta}, [T]_{\beta\leftarrow\alpha}$.

   (e) Apresente as matrizes $[I]_{\alpha\leftarrow\beta}, [I]_{\beta\leftarrow\alpha}$.

   (f) Sabendo que $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, determine $[\mathbf{v}]_\alpha$.

4. Falso ou verdadeiro? Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformações linear sobrejetiva. Prove as verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas.

   (a) $m \leq n$

   (b) T é injetiva.

   (c) Se $m = n$ então existe T^{-1}.

   (d) Se $m < n$ então T não é injetiva.