Projeto de Apoio em Álgebra 2014.2 - Atividade 11

1. Pedro e João são dois pequenos, bravos e pios trabalhadores. Eles decidem dar suas economias, 3 moedas cada, ao padre. O padre acha que é demais para estas crianças que tiveram que trabalhar duro para ganhar esse dinheiro: das 6 moedas que foram oferecidas, decidiu aceitar apenas 3. Pedro e João ficam com dúvida de como dividir irmãmente as 3 moedas em que o padre deixou. Ficam cada um com uma moeda, e como são realmente generosos, deixam a terceira no caixa dos pobres.

   Em última análise, cada um deu 3-1 = 2 moedas, ou seja 4 no total, em vez de 6. Ao adicionar a moeda colocada na caixa dos pobres, temos apenas 5 moedas. Onde ficou a moeda faltando?

2. Diz-se que uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é uma projeção se $A^2 = A$, e é uma simetria se $A^2 = Id$.
   (a) Dê um exemplo de uma matriz de projeção para $n = 3$, cujo núcleo tem dimensão 1.
   (b) Dê um exemplo de uma matriz de projeção para $n = 3$, cujo núcleo tem dimensão 2.
   (c) Verifique que se $\mathbf{v}$ é autovetor de uma projeção A, então o autovalor associado é 0 ou 1. *Dica: observe que $A^2 - A = 0$ e que 0 e 1 são as raízes do polinómio $X^2 - X$.*
   (d) Verifique que se $\mathbf{v}$ é autovetor de uma simetria A, então o autovalor associado é -1 ou 1. *Dica: observe que $A^2 - Id = 0$ e que -1 e 1 são as raízes do polinómio $X^2 - 1$.*
   (e) Relacione os autoespaços $E_0(A)$ e $E_1(A)$ de uma matriz projeção A ao seu núcleo e a sua imagem.
   (f) Lembrando do resultado que para uma projeção, $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Nuc}(A) \equiv \mathbb{R}^n$, mostre que qualquer projeção é diagonalizável.
   (g) Seja A uma matriz de projeção e $B = 2 \cdot A - Id$. Verifique que B é uma simeteria. Relacione os autoespaços $E_0(A)$ e $E_1(A)$ de A aoos autoespaços $E_{-1}(B)$ e $E_1(B)$ de B.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + y, y, 0)$.
   (a) Quais são o núcleo e a imagem de T.
   (b) Determine os autovalores e autovetores de T.
   (c) Determine os 5 espaços invariantes de T.
   (d) Determine se T é diagonalizável.

4. Considere a transformação T associada à matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ na base canônica de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Quais são o núcleo e a imagem de T.
   (b) Determine o autovalor e o autovetor de T.
   (c) Determine os 5 espaços invariantes de T.
   (d) Verifique que $T^4 = 0$ (T é chamada de nilpotente).
   (e) Verifique que se $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$, $\{\mathbf{v}, T(\mathbf{v}), T^2(\mathbf{v}), T^3(\mathbf{v})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$. Escreva a matriz de T nessa base.