

Projeto de Apoio em Álgebra 2014.2 - Atividade 9



1. “Se o senhor dobrar a quantia que tenho no bolso, lhe darei 20 reais” – disse Joca a seu pai. Satisfeito o pedido e cumprida a promessa, dirige-se à sua mãe, com o mesmo pedido com a mesma condição. Atendido, deu o prometido. Por fim, fez igual pedido a seu avô. Também atendido, deu 20 reais e ficou zerado. Quanto Joca possuía antes de fazer o primeiro pedido?

2. Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de um espaço vetorial V , e H o subespaço de V dado por $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$

Seja $k \leq n$, $P : V \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow V$ definidos por:

$$P(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k.$$

$$S(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k - a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \dots - a_n\mathbf{v}_n.$$

- (a) Mostre que P é uma projeção sobre H , ou seja $P \circ P = P$ e $\text{Im}(P) = H$.
- (b) Determine $\text{Nuc}(P)$. P é injetora? sobrejetora?
- (c) Mostre que se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal, $\text{Nuc}(P)$ é o complemento ortogonal de $\text{Im}(P)$.
- (d) Mostre que S é uma simetria (reflexão), ou seja $S \circ S = Id$.
- (e) Mostre que $\forall \mathbf{v} \in V, S(\mathbf{v}) = 2 \cdot P(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$.
- (f) Determine $\text{Nuc}(S)$ e $\text{Im}(S)$. S é injetora? sobrejetora?
- (g) Determine o eixo $E_1(S)$ de S , ou seja o conjunto dos vetores *invariantes* por S :
 $E_1(S) = \{\mathbf{v} \in V : S(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$.

3. Seja $\alpha = \{(1, -1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ uma base de um subespaço H do \mathbb{R}^4 . Seja $\mathbf{v} = (1, -2, 5, 0) \in H$ e $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 1) \notin H$.

- (a) Determine $[\mathbf{v}]_\alpha$.
- (b) Utilize o processo de Gram-Schmidt sobre α e apresente uma base γ ortogonal (mas não ortonormal) para H . Determine $[\mathbf{v}]_\gamma$.
- (c) Ortonormalize a base γ obtendo a base ortonormal β de H e determine $[\mathbf{v}]_\beta$.
- (d) Encontre o vetor $\mathbf{u} \in H$ mais próximo de \mathbf{w} .

4. Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- (a) Resolva, no sentido dos mínimos quadrados, o sistema impossível $Ax = b$.
- (b) Apresente uma base para $\text{Im}(A)$.
- (c) Apresente uma base para $\text{Nuc}(A^T)$.
- (d) Mostre que $(\text{Im}(A))^\perp = \text{Nuc}(A^T)$.