Projeto de Apoio em Álgebra 2014.2 - Atividade 8

1. Nessa questão, consideramos o espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$.
   (a) Defina *norma de um vetor* a partir de um produto interno .
   (b) Sendo $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, prove que: $\max_{i=1..n} |v_i| \leq \|\mathbf{v}\| \leq \Sigma_{i=1..n} |v_i|$
   (c) Curiosamente, também é possível obter o produto interno a partir da norma, utilizando a igualdade:
   $$\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2)$$
   Demonstre esta igualdade usando a bi-linearidade do produto interno.

2. Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases $\alpha = \{(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ e $\beta = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$.
   (a) Determine se alguma dessas bases são ortogonais.
   (b) Ortonormalize a(s) base(s) não ortogonal(ais).
   (c) Para $\mathbf{v} = (1,-2,-5)$, determine $[\mathbf{v}]_\alpha, [\mathbf{v}]_\beta$ e as coordenadas de $\mathbf{v}$ na(s) base(s) explicitada(s) no item (b).

3. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores ortogonais do $\mathbb{R}^2$, ambos com norma 1.
   (a) Mostre que, se $\mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}$, então $\alpha = \langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{u} \rangle$.
   (b) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Escreva a matriz de T na base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ em função dos produtos internos entre $\mathbf{u}, \mathbf{v}, T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$.
   (c) T é chamada de autoadjunta se, para quaisquer dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,vale: $\langle T(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} \rangle = \langle u \,|\, T(v) \rangle$. Mostre que se T é autoadjunta, a matriz de T na base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é simétrica.
   (d) Verifique que $T(x,y) = (y,x)$ é autoadjunta mas que sua matriz na base $\{(2,0),(0,1)\}$ não é simétrica.

4. Seja $H = \mathrm{Span}\,\{(1,0,0,1),(1,1,-1,0)\}$ e $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$.
   (a) Determine uma base para $H^\perp$.
   (b) Calcule a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em H.
   (c) Calcule a reflexão de $\mathbf{v}$ em torno de H.