Projeto de Apoio em Álgebra 2014.2 - Atividade 6

1. Considere nove bolas aparentemente iguais porém, oito delas têm o mesmo peso e somente uma é mais leve. Existe uma balança daquela com 2 pratos que equilibra o peso. Qual o número mínimo de pesagens necessárias para descobrir qual é a bola mais leve? Explique o procedimento.

2. Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:
   - $T(0,0,1) = T(0,0,2)$
   - $T(1,0,0) = (0,1,1,0,0)$
   - $T(2,1,2) = (0,3,1,0,0)$

   (a) Apresente uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$.

   (b) Apresente uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

   (c) Encontre a expressão $T(x,y,z)$.

   (d) Exiba a equação cartesiana de um subespaço vetorial S do $\mathbb{R}^3$ tal que $S \oplus \mathrm{Nuc}(T) = \mathbb{R}^3$.

   (e) Apresente uma base para um subespaço vetorial W do $\mathbb{R}^5$ tal que $W \oplus \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^5$.

3. Para cada uma das transformações geométricas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ descritas a seguir, identifique uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$, uma base para $\mathrm{Im}(T)$ e a expressão de $T(x,y,z)$.

   (a) T é a projeção ortogonal no plano de equação $x + z = 0$.

   (b) T é a projeção no plano de equação $x + z = 0$ na direção da reta $\{(t,0,0), t \in \mathbb{R}\}$.

   (c) T é a projeção ortogonal na reta $\{(t,t,t), t \in \mathbb{R}\}$.

   (d) T é a reflexão em torno da reta $\{(t,t,t), t \in \mathbb{R}\}$.

   (e) T é a reflexão em torno do plano de equação $x + z = 0$.

4. Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que rotaciona o seu argumento de ângulo θ no sentido anti-horário em torno da origem.

   (a) Apresente R_θ e mostre que R_θ é uma transformação linear.

   (b) Os pontos $A = (0,0)$, $B = (4,2)$ e $C = (x,y)$ são vértices de um triângulo equilátero. Determine as possíveis coordenadas do vértice C aplicando a matrix R_Θ ao vetor AB.