

Projeto de Apoio em Álgebra 2014.2 - Atividade 5

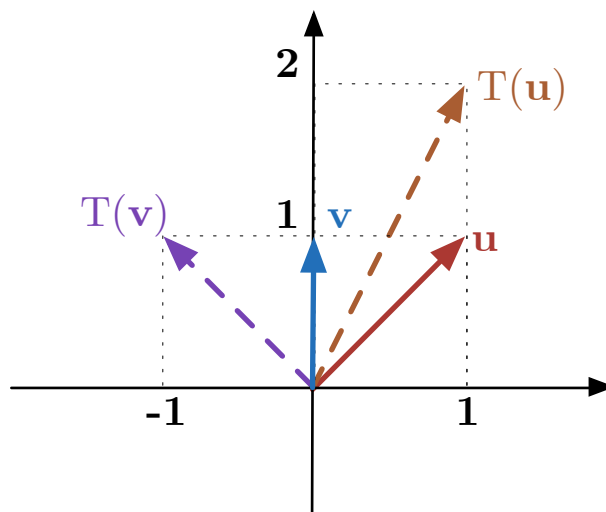


1. Considere uma ponte toda escura que suporta no máximo duas pessoas. (A) , (B) , (C) e (D) são 4 pessoas que precisam atravessar essa ponte e possuem apenas uma lanterna. Só é possível atravessar a ponte se um dos passantes carregar a lanterna. Além disso sabe-se que:

- A pessoa (A) , sozinha, leva 1 minuto nesta travessia.
- A pessoa (B) , sozinha, leva 2 minutos.
- A pessoa (C) , sozinha, leva 5 minutos.
- A pessoa (D) , sozinha, leva 10 minutos.
- Quando duas pessoas atravessam juntas a ponte, o tempo considerado é o maior.

As quatro pessoas elaboraram uma estratégia para que todos atravessassem a ponte no menor tempo possível. Quanto vale esse tempo? Explícite seu raciocínio.

2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear. Dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} do domínio e suas respectivas imagens $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ estão representados no gráfico abaixo:



- Dê uma expressão que determina o operador T .
- Verifique que a expressão de T é de fato uma transformação linear.
- Determine $\text{Nuc}(T)$, dê a sua dimensão e, se possível, apresente uma base para $\text{Nuc}(T)$. T é injetiva? Justifique.
- Determine $\text{Im}(T)$, dê a sua dimensão e, se possível, apresente uma base para $\text{Im}(T)$. T é sobrejetiva? Justifique.

3. Seja $[T]$ a matriz associada a uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ nas bases canônicas de V e W :

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Escreva a definição de transformação linear.
 - Apresente a expressão que determina $T(\mathbf{v})$ para $\mathbf{v} \in V$.
 - Determine $\text{Nuc}(T)$, dê a sua dimensão e, se possível, apresente uma base para $\text{Nuc}(T)$. T é injetiva? Justifique.
 - Determine $\text{Im}(T)$, dê a sua dimensão e, se possível, apresente uma base para $\text{Im}(T)$. T é sobrejetiva? Justifique.
4. Sejam $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear injetiva.
- Defina transformação linear injetiva.
 - Mostre que $n \leq m$.
 - Mostre que se os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes, então os vetores $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^m$ são linearmente independentes.
 - Enuncie o teorema do Núcleo-Imagem de uma transformação linear.
 - Mostre que se $m = n$ então T é sobrejetiva.