Projeto de Apoio em Álgebra 2014.2 - Atividade 4

1. Tenho 3 camisas: A, B e C. Uma é verde, uma é branca e outra é azul, não necessariamente nessa ordem. Sabe-se que somente uma das afirmações abaixo é verdadeira:

   i. A é verde. ii. B não é verde. iii. C não é azul.

   Qual a afirmação verdadeira? Determine a cor de cada camisa.

2. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} V &= \{(t,0,-t,0), t \in \mathbb{R}\} \\ W &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y, z = -w\right\} \end{aligned}$$

   (a) Defina o que é uma base de um espaço vetorial.
   (b) Determine a dimensão de V.
   (c) Apresente vetores não nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ de modo que $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = V$. O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base para V? Justifique.
   (d) Apresente uma base para V.
   (e) Escreva W na forma paramétrica.
   (f) Determine a dimensão de W e uma base para W.
   (g) Determine, se possível, uma base e a dimensão de $V \cap W$.
   (h) Determine, se possível, uma base e a dimensão de $V + W$. Essa soma é direta?
   (i) $V \cup W$ é um subespaço do $\mathbb{R}^4$? Justifique.
   (j) Apresente um subespaço X de menor dimensão possível de modo que $W + X = \mathbb{R}^4$.
   (k) Apresente um subespaço Y de menor dimensão possível de modo que $\dim(W \cap Y) = 1$.

3. Sejam $\beta = \{(1,1,0), (0,1,-1), (0,1,0)\}$ e $\gamma = \left\{1 - X, 1, X^2 + X\right\}$
   (a) β é base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.
   (b) γ é base de $\mathcal{P}_2$? Justifique.
   (c) Seja $\mathbf{v} = (3,0,2)$. Determine $[\mathbf{v}]_\beta$.
   (d) Seja $[\mathbf{v}]_\beta = (1,2,-3)$. Determine $\mathbf{v}$.
   (e) Seja $p(X) = 2 \cdot X^2 - 3 \cdot X$. Determine $[p]_\gamma$.
   (f) Seja $\alpha = \{(0,1,-1), (0,1,0)\}$ uma base de um subespaço W do $\mathbb{R}^3$. Determine $[(0,3,5)]_\alpha$.

4. Considere a seguinte afirmação:

   $\boxed{\text{H: } \beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \text{ é base de um subespaço } W \text{ do } \mathbb{R}^n}$

   Considerando que H é hipótese para as teses T_i apresentadas abaixo, decida, em cada caso, se as afirmações do tipo $\boxed{\text{Se } H \text{ então } T_i}$ são falsas ou verdadeiras. Prove as verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas.
   (a) $T_1 : \dim(W) = k$.
   (b) $T_2 : \alpha = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 + v, \ldots, \mathbf{v}_k + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$ é base de W.
   (c) $T_3 : \gamma = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_1\}$ é base de W.