Exercícios Adicionais

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois da seguinte seleção de exercícios do livro:

Produto Interno

Capítulo 5
Fix.: Todos
Prob.: 5.1, 5.3, 5.5, 5.7, 5.8, 5.10, 5.11
Ext.: 5.1(b), 5.2(a,b,c,d), 5.3, 5.4, 5.6, 5.7, 5.8, 5.11
Des.: 5.1, 5.6, 5.7

1. Prove que $\forall u \in \mathbb{R}^n$ não nulo o vetor $\frac{1}{\|u\|}u$ é unitário.

2. Prove que se $u \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal a $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$, então $u \in \big[\text{span}\{u_1, \ldots, u_k\}\big]^\perp$.

3. Seja $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ortogonal e $u = a_1u_1 + \cdots + a_ku_k$. Mostre que
$$a_j = \frac{\langle u, u_j\rangle}{\|u_j\|^2}.$$
Conclua que se $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é um conjunto ortonormal, então $a_j = \langle u, u_j\rangle$ para $j = 1, \ldots, k$.

4. Verifique que
$$\beta = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$
é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e usando o exercício anterior calcule $\big[(3,2)\big]_\beta$.

5. Lembre-se que dado $H \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial, o *complemento ortogonal* de H é o conjunto
$$H^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle w, v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in H\}.$$
Seja $u_1, \ldots, u_k$ uma base para H. Mostre que
$$H^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle w, u_1\rangle = \cdots = \langle w, u_k\rangle = 0\}.$$
Lembre-se que você precisa provar que
$$H^\perp \subset \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle w, u_1\rangle = \cdots = \langle w, u_k\rangle = 0\}$$
e
$$H^\perp \supset \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle w, u_1\rangle = \cdots = \langle w, u_k\rangle = 0\}.$$
Dica: uma das inclusões é consequência do exercício 2. Qual delas e por quê?

6. Mostre que $(H^\perp)^\perp = H$ para todo subespaço $H \subset \mathbb{R}^n$. *Dica: você pode usar que* $\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$. *Tente justificar que* $\dim(H^\perp)^\perp = \dim H$ *usando a fórmula da dimensão da soma direta vista antes da P2. Em seguida, tente justificar que* $(H^\perp)^\perp \subset H$. *Por que essas duas informações são suficientes para concluir que* $(H^\perp)^\perp = H$*?*

7. Julgue verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo. Caso verdadeira, prove. Caso falsa, forneça um contra-exemplo:
   (a) Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ não nulos. Se $\langle u, v\rangle = \langle v, w\rangle = 0$, então $\langle u, w\rangle = 0$.
   (b) Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle v, w\rangle < 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^3$ não nulo.
   (c) Se $v = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é tal que $a_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, então **todo** vetor $w = (b_1, \ldots, b_n)$ não nulo e ortogonal a v tem ao menos uma coordenada b_i negativa.
   (d) Sejam $H \subset \mathbb{R}^n$ e $P_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção ortogonal sobre H. Então $\|P_H(v)\| \leqslant \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. *(noutras palavras: projeções ortogonais encolhem os vetores?)*
   (e) Se $\mathbb{R}^n = V \oplus W$, então $W = V^\perp$.
   (f) $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$. *(noutras palavras: o que é o que é que é ortogonal a todo mundo?)*

8. Mostre que se $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, então $v = 0$. *(noutras palavras: o que é o que é que é ortogonal a todo mundo?)*

9. Mostre que se $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = w$.

10. Mostre que se $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in \beta$, sendo β base de $\mathbb{R}^n$, então $u = w$. *(noutras palavras: mostre que basta checarmos $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ para uma base ao invés do espaço todo como no exercício anterior.)*

11. Sejam $H \subset \mathbb{R}^n$, β uma base de H e γ uma base de $H^\perp$. Sejam também P_H e R_H as transformações de projeção e reflexão ortogonal em relação a H respectivamente. Calcule $[P_H]_\sigma$ e $[R_h]_\sigma$ onde $\sigma = \beta \cup \gamma$.

12. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é chamada *ortogonal* se $A^T A = \mathrm{Id}$. Mostre que uma matriz é ortogonal se e somente se suas colunas são vetores orto<u>normais</u>. *(Cuidado! Essa nomeclatura costuma causar confusão. Uma <u>matriz</u> ortogonal tem colunas formando um <u>conjunto</u> ortoNORMAL. Logo, a classificação "ortogonal" pode ser dada a conjuntos e a matrizes, tendo significados diferentes. Então não confunda ortogonal com ortogonal.)*

13. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma *isometria* se $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Mostre que se $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz $\langle T(u_i), T(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle$ para $i, j = 1, \ldots, n$, então T é uma isometria. *Dica: escreva vetores genéricos u, v como combinações lineares dos vetores dessa base e tente provar que $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.*
   (b) Verifique que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $T(0,1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é uma isometria.
   (c) Mostre que se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma isometria, então $\|T(u)\| = \|u\|$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$ (em outras palavras, T *preserva a norma de vetores*).
   (d) Pode uma projeção ortogonal ser uma isometria? Por quê?
   (e) Mostre que se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma isometria, então T é injetiva. *Dica: Suponha que $T(u) = 0$ e use o item (c).*
   (f) Suponha que $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ são isometrias. Mostre que $S \circ T$ é uma isometria.

(g) Sejam $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\gamma = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases ortonormais de $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformação linear tal que $T(u_j) = v_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Mostre que T é uma isometria. *Esse resultado foi utilizado para construir o exemplo do item (b) e de fato fornece um método para construir isometrias: basta escolher duas bases ortonormais de um espaço $\mathbb{R}^n$ e "levar" uma na outra com a transformação T.*

14. Denote as colunas de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

por

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Se $H = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, mostre que $H^\perp = \operatorname{Nuc}(A^T)$. *Dica: use o exercício 5.*