Exercícios Adicionais - Última lista do curso

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feito os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

Capítulo 6
Fix.: 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7
Prob.: 6.7
Ext.: 6.1, 6.7(a), 6.11, 6.20
Capítulo 7
Fix.: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.9, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14
Prob.: 7.2, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.12
Aplic.: 7.15
Ext.: 7.1, 7.2(a,b,c), 7.5(b,c), 7.6, 7.10(a,b), 7.11, 7.15, 7.22, 7.25(b)
Des.: 7.9

1. Verdadeiro ou falso: existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cujo polinômio característico seja
$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)^2(4-\lambda).$$

2. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de $T : U \longrightarrow U$. O *autoespaço de T associado a λ* é o conjunto
$$V_\lambda = \{u \in U \,|\, T(u) = \lambda u\}.$$
Mostre que V_λ é um subespaço vetorial de U.

3. Seja $T : U \longrightarrow U$ linear, V_{λ_1} e V_{λ_2} autoespaços associados aos autovalores λ_1, λ_2. Mostre que $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}$ é subespaço invariante para T.

4. Seja $T : U \longrightarrow U$ linear e $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ autoespaços com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$. Conclua que a soma $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}$ é direta sempre que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

5. Mostre que dois autovetores associados a autovalores diferentes são linearmente independentes. *Dica: suponha que não sejam linearmente independentes e tente chegar em alguma contradição.*

6. Verdadeiro ou Falso: sejam v_1, v_2 autovetores de $T : U \longrightarrow U$ associados respectivamente aos autovalores λ_1, λ_2. Então $v_1 + v_2$ é autovetor de T.

7. Verdadeiro ou falso: uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$, com $\dim(V) = n$ ímpar, sempre tem algum autovetor. *Dica 1: lembre que o grau do polinômio característico é n e pesquise sobre o enunciado do Teorema Fundamental da Álgebra. Dica 2: desenhe o gráfico de um polinômio de grau ímpar.*

8. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, -x)$ não tem autovetores.

9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2x + y, 3z).$$

(a) Encontre os autovalores de T e os respectivos autoespaços.

(b) A transformação T é diagonalizável? Se sim, dê sua forma diagonal.

(c) Verifique que o plano x, y é um subespaço invariante para T. Algum vetor do plano x, y é autovetor? Algum não é?

10. Sejam H subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e $P_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção ortogonal sobre H.

(a) Quem são os autovalores de P_H? Quem são os autoespaços associados? Qual a dimensão de cada autoespaço?

(b) P_H é diagonalizável? Se sim, qual a sua forma diagonal?

(c) Calcule $\det(P_H)$.

Resolva (a), (b) e (c) considerando $R_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a reflexão em torno de H, ou seja, $R_H(v) = v$ para $v \in H$ e $R_H(w) = -w$ para $w \in H^\perp$.

11. Suponha que $T : V \longrightarrow V$ é uma transformação linear e seja $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V tal que

$$[T]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_1 + v_2 - v_3)$

(b) Calcule os autovalores e autovetores de T e decida se T é diagonalizável.

(c) Dê um exemplo de subespaço $S \subset V$ invariante por T com $\dim(S) = 2$ e $\dim(T(S)) = 1$.

Obs.: Note que as respostas de a, b e c deverão ser expressas como combinações lineares de v_1, v_2, v_3, pois eles estão dados genericamente.

12. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores e os autovetores de A.

(b) Determine $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ inversível tal que

$$A = PDP^{-1}$$

onde D é uma matriz diagonal cujas entradas d_{ii} são os autovalores de A.

(c) Use o item anterior para calcular A^{10}.