Lista 1 para a P2

Observação 1: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós sugerimos fazê-los depois de terem sido feitos os seguintes exercícios do livro:

Fixação: 3.5 ao 3.13, 4.1 ao 4.18
Problemas: 3.11, 3.12, 3.13, 3.15, 3.16, 3.18, 4.3, 4.7, 4.8 e 4.9
Extras: 3.4, 3.5, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.16, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.4, 4.5 e 4.6
Desafio: 3.1 (tem um erro de notação. Deveria ser "$V = \{0\}$"), 4.1 e 4.5

Observação 2: Recomendamos que esta lista seja feita até o dia 8 de outubro, de maneira a não sobrepor outros assuntos que ainda estão por vir. Lembrando que esta lista não contempla toda a matéria da P2 e que, em breve, forneceremos uma segunda lista com o resto da matéria.

Operações com subespaços

Em sala foram vistas duas operações com subespaços: interseção e soma. Dados V e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial $(E, +, \cdot)$, nós definimos:

$$V \cap W = \{x \in E \,:\, x \in V \text{ e } x \in W\},$$
$$V + W = \{v + w \in E \,:\, v \in V, w \in W\}.$$

Noutras palavras, a interseção é formada por aqueles vetores que são comuns a ambos os subespaços, enquanto que soma é o subespaço vetorial de E gerado por todas as somas de vetores de V com vetores de W. Lembre também que a união de dois subespaços V e W é um subespaço de E se somente se um dos subespaços V ou W está contido no outro, isto é, se somente se $V \subset W$ ou $W \subset V$. Nesse caso, a união coincide com a soma. Este é o motivo pelo qual a união não aparece na lista acima.

No caso em que o único vetor comum aos conjuntos V e W é o vetor nulo, isto é $V \cap W = \{0\}$, dizemos que a soma de V e W é direta e escrevemos $V \oplus W$ em vez de $V + W$.

1. [M] Encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1, 2, -2, 1)$ e $(1, 0, -2, 2)$.

2. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\}$$
$$W = \operatorname{span}\{(-1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, 1), (1, -1, 0, 0)\}.$$

   (a) [F] Encontre um conjunto gerador de V.

   (b) [F] Encontre um sistema de equações lineares homogêneo ($A\mathbf{x} = 0$) para o qual W seja o conjunto-solução.

(c) [F] Encontre uma base para $W \cap V$ e a sua dimensão.

(d) [M] Encontre uma base para $V + W$ e a sua dimensão.

(e) [M] A soma de V e W é direta? Justifique.

O próximo exercício fornece uma fórmula para calcular a dimensão do subespaço $V+W$. Antes de fazer o exercício, você deve ter lido o enunciado e as demonstrações do Lema 3.26, do Corolário 3.27 e do Lema 3.28 do livro (páginas 84 e 85).

3. [D] Sejam V e W dois subespaços de um subespaço vetorial $(E, +, \cdot)$. Prove que

$$\dim (V + W) = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W).$$

DICA: Considere primeiro uma base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ da interseção. Os vetores desta base são linearmente independentes em V, portanto podemos completá-la (acrescentar vetores) até obter uma base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_l$ de V (qual é portanto a dimensão de V?). O mesmo podemos fazer com W: a base da interseção é um conjunto linearmente independente em W e, consequentemente, podemos acrescentar vetores até obter uma base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_s$ de W (qual é portanto a dimensão de W?). Assim temos que $\dim (V \cap W) = k$, $\dim V = l$ e $\dim W = s$. Agora prove que os vetores

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_s$$

formam uma base de $V + W$ e conte os vetores que aparecem nesta base para deduzir a fórmula.

4. [F] Use a fórmula dada no exercício anterior para provar que a soma de V e W é direta se, e somente se, $\dim (V + W) = \dim V + \dim W$.

   Obs.: Este resultado fornece a seguinte fórmula: $\dim (V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

5. [D] Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Considere $V, W \subset E$ subespaços vetoriais tais que $E = V + W$ e tais que $\beta = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\gamma = \{w_1, \ldots, w_s\}$ sejam bases de V e W, respectivamente. Prove que $E = V \oplus W$ se e somente se $\beta \cup \gamma$ for base de E.

Transformações Lineares

1. [F] Sejam U, V espaços vetoriais. Verifique que as funções $T : U \to V$ e $I : U \to U$ dadas respectivamente por

$$T(u) = 0 \quad \text{e} \quad I(u) = u$$

   são transformações lineares. Elas são chamadas respectivamente de *transformação nula* e *transformação identidade*.

2. Decida se cada uma das funções abaixo é transformação linear.

   (a) [F] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$;

(b) [F] $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 5x$;

(c) [F] $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 5x + 1$;

(d) [F] $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + y, y - x, x + 1)$;

(e) [F] $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T(A) = a_{11} \cdot a_{22}$.

(f) [M] $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_4$ dada por $F(p)(x) = x^2 \cdot p(x)$.

3. [M] Dados $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, denotamos o maior destes $n+1$ números por $\max\{a_0, \ldots, a_n\}$. A função $T : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ dada por

$$T\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \max\{a_0, \ldots, a_n\}$$

é linear?

4. [M] Mostre que a função $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(p) = p(0)$ é linear. Encontre geradores para o núcleo de T e calcule sua dimensão. T é injetiva? T é sobrejetiva?

5. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

(a) [F] Mostre que o *núcleo* de T um subespaço vetorial de V.

(b) [M] Seja $S \subset V$ um subespaço vetorial. Mostre que a *imagem de S por T*, definida como

$$T(S) = \{w \in W \,:\, \exists v \in S \text{ com } T(v) = w\}$$

é um subespaço vetorial de W.

Obs.: Quando tomamos $S = V$, chamamos a imagem de S por T simplesmente de *imagem de T* e usamos a notação $\mathrm{Im}(T)$.

(c) [D] Seja S um subespaço vetorial de V. Mostre que se os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ geram S, então os vetores $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_k)$ geram $T(S)$. Dito de outra forma, prove que

$$T(S) = \mathrm{span}\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_k)\}.$$

Note que isso é uma igualdade de conjuntos. Você deve mostrar portanto duas coisas:

$$T(S) \subset \mathrm{span}\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_k)\}$$

e

$$T(S) \supset \mathrm{span}\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_k)\}.$$

Noutras palavras, se queremos descobrir em que subespaço a transformação linear T transforma S, basta ver como T transforma um conjunto gerador de S.

6. [M] Para as funções do exercício 2 que forem transformações lineares, determine o núcleo, a imagem e as respectivas dimensões. O mesmo para a transformação linear do exercício 4.

7. Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definida por:

$$L(x, y, z, t) = (x + 2y - z + t, -x - 2y + z - t, -y + z, 0, y - z).$$

   (a) [F] Encontre uma base e a dimensão de $\mathrm{Nuc}(L)$.

   (b) [M] Encontre um conjunto gerador de $\mathrm{Im}(L)$ que não seja linearmente independente.

   (c) [M] Use o teorema do núcleo e imagem para determinar a dimensão de $\mathrm{Im}(L)$.

   (d) [F] L é injetora? Justifique.

   (e) [F] L é sobrejetora? Justifique.

   (f) [M] Para cada um dos subespaços listados abaixo, encontre um conjunto gerador da sua imagem por L:

   - $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; 2x = y, \; z = 3t\}$.
   - $S_2 = \mathrm{span}\{(-1, 2, 3, 1), (0, 3, -1, 0), (1, 1, 1, -1)\}$.
   - $S_3 = S_1 \cap \mathrm{Nuc}(L)$.
   - $S_4 = S_1 + S_2$.

   (g) [D] Dê um exemplo de um plano π de $\mathbb{R}^4$ que quando transformado por L vira um ponto em $\mathbb{R}^5$.

   (h) [D] Dê um exemplo de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3 cuja imagem por L é uma reta em $\mathbb{R}^5$.

   (i) [D] Existe um plano π de $\mathbb{R}^4$ cuja imagem por L seja um plano em $\mathbb{R}^5$? Justifique a sua resposta.

8. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_2$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - c) + (b - c)x + cx^2.$$

   (a) [M] Exiba uma base e determine a dimensão do núcleo de T.

   (b) [F] Encontre o conjunto S de todas as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tais que

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + \frac{\pi}{4}x^2.$$

   (c) [D] Determine um conjunto gerador para a imagem por T dos seguintes subespaços:

   i. $S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \; : \; A = A^T\}$ (matrizes simétricas).

   ii. $S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \; : \; A = -A^T\}$ (matrizes antissimétricas)

   iii. $S_3 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \; : \; \mathrm{tr}\, A = 0\}$ (matrizes de traço 0)

   (d) [D] Encontre uma base para o subespaço vetorial $T(S_1) + T(S_2)$ de $\mathcal{P}_2$

   (e) [F] Verifique que $S_2 \cup S_3$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Nos próximos exercícios você deve usar o seguinte teorema, chamado em muitos livros de *Teorema fundamental das transformações lineares*. A sua demonstração fornece um roteiro para resolver os exercícios propostos.

Teorema. Sejam E e F dois espaços vetoriais, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ uma base de E e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vetores quaisquer em F (Observe que estamos pegando a mesma quantidade de vetores em E e em F). Então existe uma ÚNICA transformação linear $T : E \to F$ tal que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$.

Em linguagem coloquial, esse teorema diz que uma transformação linear fica inteiramente determinada pelas imagens dos elementos de uma base do domínio. Isto é, se, a cada vetor $\mathbf{u}_i$ de uma base de E (domínio), você faz corresponder um vetor $\mathbf{v}_i$ de F (contradomínio), então temos uma única tranformação linear T satisfazendo essas condições. Como encontramos essa T? Vejamos a demonstração do teorema e derivemos dela um roteiro.

Demonstração do Teorema. Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ é uma base de E, qualquer vetor $\mathbf{u} \in E$ se escreve de maneira única como combinação linear dos $\mathbf{u}_i' s$. Ou seja, existem números reais <u>únicos</u> $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i. \tag{1}$$

Portanto, a imagem por T do vetor $\mathbf{u}$ é a mesma que a imagem por T do vetor $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i$. Segue disto que:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i\right) \\ T(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i) \quad \text{(devido à linearidade de } T\text{)} \\ T(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \text{(já que } T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i\text{).} \end{aligned}$$

A expressão de T desejada é $T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

Para verificar que T é a única transformação linear que satisfaz, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, suponha que existe outra transformação linear $G : E \to F$ satisfazendo também que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $G(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$. Repetindo as contas que fizemos acima para T, mas agora com G, nós obtemos que $G(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i$ qualquer que seja o vetor $\mathbf{u} \in E$. Portanto, qualquer vetor $\mathbf{u} \in E$ tem a mesma imagem tanto por T quanto por G. Como estas duas transformações tem o mesmo domínio e o mesmo contradomínio, nós concluímos que $T = G$.

Qual é o roteiro que se deriva da demostração acima? Vejamos!

Roteiro: Se você quiser encontrar a transformação linear $T : E \to F$ que satisfaz, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, você faz:

Passo 1 Pegue um vetor genérico de E e expresse ele como combinação linear da base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, colocando os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ em função das coordenadas do vetor genérico. Assim,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i.$$

Passo 2 Aplique T em ambos os lados e use a linearidade para obter:

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i).$$

Passo 3 Use o fato que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ para concluir:

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

Observação: Existem alguns exercícios nos quais você não tem exatamente a informação que você precisa para usar o teorema fundamental das transformações lineares. Nesses casos você pode ter informação a menos ou informação a mais (redundante). Se você tiver informação a menos, então você precisa acrescentar dados até obter aquilo que você precisa. Caso você tenha informação a mais (redundante), você extrai dela o que você necessita.

9. [M] Encontre a expressão analítica da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (-1, 5)$ e $T(0, 1) = (1, -1)$.

10. [M] Encontre a expressão analítica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que a imagem de T seja gerada pelos vetores $(1, 2, 0, -4)$ e $(2, 0, -1, -3)$. A transformação linear encontrada é a única que satisfaz a condição dada no exercício?

11. (P2 de 2014.1) Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ transformações lineares injetivas:
    (a) [M] Mostre que $n \leqslant m \leqslant k$.
    (b) [D] Prove que $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é injetiva.
    (c) [D] Prove que se $\{v_1, \ldots, v_s\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente independente, então

    $$\{T(v_1), \ldots, T(v_s)\} \subset \mathbb{R}^m$$

    é também linearmente independente.