Exercícios Adicionais

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feito os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

Representação matricial de transformações lineares

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
$$[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$
onde $\varepsilon = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$
   (a) Ache uma base para $\mathrm{Im}(T)$.
   (b) Ache uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$.

2. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$ a transformação linear dada por
$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ z-w & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine a matriz $[T]_\varepsilon$, onde
$$\varepsilon = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

3. Sejam $T : U \to V$ uma transformação linear, $\beta = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ e $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de U e V respectivamente e suponha que
$$\begin{aligned} T(u_1 - u_2) &= 3v_1 - 2v_2 \\ T(u_2 - u_3) &= -2v_1 + 2v_2 \\ T(u_3 - u_4) &= -2v_2 + v_3 \\ T(u_4) &= v_1 + v_2 - v_3. \end{aligned}$$
   (a) Calcule $T(u_1)$, $T(u_2)$ e $T(u_3)$ em função (ou seja, como combinação linear) dos vetores de γ.
   (b) Calcule $[T(u_i)]_\gamma$ para $i = 1,2,3,4$.
   (c) Determine $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$.
   (d) Encontre uma base para o núcleo de T em termos dos vetores de β.
   Dica: Resolva o sistema homogêneo $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}X = 0$, para $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ e observe que você obterá *as coordenadas dos vetores do núcleo de T na base β.*
   (e) Encontre um gerador para a imagem de T.
   Dica: observe que
$$[u_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [u_2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots$$
etc (por quê?). Aplique $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$ a esses vetores coluna. O que você obterá serão *as coordenadas de $T(u_i)$ na base γ*, para $i = 1,2,3,4$. Isso é uma manifestação da fórmula
$$[T(u)]_\gamma = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}[u]_\beta$$
vista em aula.