Álgebra Linear I – MAT1200

Prova P4 – 12 dez 2014 (2014.2)

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

☐ favor corrigir essa prova ☐ favor NÃO corrigir essa prova

Questão	1	2	3	Total
Valor	3½	4	4½	12
Grau (Revisão)				

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30 min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta.
- As respostas podem ser escritas a lápis.
- Não é permitido o uso de calculadora;
- Este enunciado possui 2 páginas, contando com a capa.
- Os itens de cada questão são relativamente independentes. Por exemplo pode responder o item (b) sem ter feito o (a).

Questão 1 ——— **3½ ptos**

Andrezinho respondeu à questão " Prove que, para todo subespaço vetorial $H \subset \mathbb{R}^n$, tem-se que $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$ " da seguinte maneira:

> Vamos provar que $H \cap H^\perp = \{0\}$. De fato, se $\mathbf{v} \in H \cap H^\perp$, $\mathbf{v}$ pertence em particular a $H^\perp$ e então $\mathbf{v}$ é ortogonal a todos os vetores de H. Mas $\mathbf{v}$ também pertence a H, então $\mathbf{v}$ é ortogonal a ele mesmo. Logo $\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2 = 0$, e assim $\mathbf{v} = 0$. Portanto $H \cap H^\perp = \{0\}$ e então $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$. □

1 pto (a) Sejam V e W dois subespaços vetoriais de E. Defina " $V + W$ ".

1 pto (b) Defina " a soma dos subespaços vetoriais V e W é direta ".

1 pto (c) Andrezinho escreveu apenas uma demonstração parcial. O que falta na demonstração dele?

½ pto (d) Complete a demonstração do Andrezinho. *(Use as dimensões de H e $H^\perp$!)*

Questão 2 ——— **4 ptos**

Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (x-y, x-z, y+z) \ ,$$

e denote $T^2 = T \circ T$ e $T^3 = T \circ T^2$.

1 pto (a) Mostre que para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, o conjunto $\{\mathbf{w}, T(\mathbf{w}), T^2(\mathbf{w}), T^3(\mathbf{w})\}$ é L.D.

Agora considere $\mathbf{v} = (1,0,0)$. Note que $\beta = \{\mathbf{v}, T(\mathbf{v}), T^2(\mathbf{v})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e sejam a_0, a_1, a_2 as coordenadas de $T^3(\mathbf{v})$ na base β.

1 pto (b) Escreva a matriz $A = [T]_\beta$ em função de a_0, a_1 e a_2.

1 pto (c) Calcule o polinômio característico de A. *(Pode deixar em função do a_i's.)*

*+1 pto** (d) Determine em função dos a_i's um polinômio $p \in \mathcal{P}_3$, $p(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + b_3\,x^3$ tal que $p(A) = b_0\,I + b_1\,A + b_2\,A^2 + b_3\,A^3 = 0$.
(Dica: observe que $T^3(\mathbf{v}) = a_0\,\mathbf{v} + a_1\,T(\mathbf{v}) + a_2\,T^2(\mathbf{v})$.)

Questão 3 ——— **4½ ptos**

Dizemos que duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *comutam* se satisfazem $A\,B = B\,A$. Considere o conjunto $\mathcal{C}(A)$ de todas as matrizes que comutam com A:

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A\,B = B\,A\} \ .$$

1 pto (a) Mostre que $\mathcal{C}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

*+1 pto** (b) Seja Q uma matriz inversível e $A' = Q^{-1}\,A\,Q$. Mostre que a transformação linear S definida por $S(B) = Q^{-1}\,B\,Q$ é uma bijeção de $\mathcal{C}(A)$ para $\mathcal{C}(A')$.
(Dica: verifique o contra-domínio de S e exiba a transformação inversa S^{-1}.)

Considere agora o caso particular das matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1 pto (c) Mostre que existe uma matriz P inversível tal que $A = P\,D\,P^{-1}$.
(Observação: é possível mas não é necessário calcular a matriz P, nem P^{-1}.)

½ pto (d) Mostre que se uma matriz B comuta com D, então B é diagonal.

1 pto (e) Calcule a dimensão de $\mathcal{C}(A)$. *(Dica: pode usar o item* (b).*)*