# Álgebra Linear I – MAT1200
# Prova P3 – 29 mov 2014 (2014.2)

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

| Questão | 1 | 2 | 3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| Valor | 3 | $3\frac{1}{2}$ | $3\frac{1}{2}$ | 10 |
| Grau (Revisão) | | | | |

**Instruções Gerais:**

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30 min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

**Instruções Específicas:**

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta.
- As respostas podem ser escritas a lápis.
- Não é permitido o uso de calculadora;
- Este enunciado possui 2 páginas, contando com a capa.
- As respostas podem ficar a lápis.

1. À questão "Em $\mathbb{R}^3$, determine a projeção ortogonal de $\mathbf{b} = (1,0,0)$ sobre o plano gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (1,1,1)$ e $\mathbf{v} = (0,0,1)$", Andrezinho respondeu da seguinte maneira:

> Seja $A$ a matriz cujas colunas são os vetores do plano: $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
>
> A projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ é o vetor deste plano o mais próximo possível de $\mathbf{b}$, ou seja, é o vetor $\mathbf{w}$ solução do problema de mínimos quadrados dado por $(A^T \cdot A) \cdot \mathbf{w} = A^T \cdot \mathbf{b}$.
>
> Calculamos: $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, e a solução é $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.
>
> A projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre o plano $\operatorname{Span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ é então $(1/2, -1/2)$.

*1 pto* (a) Defina o que é a projeção ortogonal $P_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sobre um subespaço $H \subset \mathbb{R}^n$.

*½ pto* (b) Determine a projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre o plano $\operatorname{Span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$.

*1 pto* (c) Andrezinho respondeu que a projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ é um vetor $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^2$! Explique o erro de Andrezinho e a que o vetor $\mathbf{w}$ corresponde.

*½ pto* (d) Calcule a distância de $\mathbf{b}$ à sua projeção sobre o plano $\operatorname{Span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$.

2. Para cada $k$ real, considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (\ k\,x + \sqrt{2}\,y\ ,\ \sqrt{2}\,x + k\,y + \sqrt{2}\,z\ ,\ \sqrt{2}\,y + k\,z\ ).$$

*½ pto* (a) Calcule, em função de $k$, o determinante de $T$.
*(Dica: escolha uma base conveniente $\beta$ de $\mathbb{R}^3$ e determine $[T]_\beta$.)*

*1 pto* (b) Para quais valores de $k$ a transformação $T$ é inversível?

*1 pto* (c) Para $k = 0$, quais são os autovalores e os autoespaços de $T$?

*1 pto* (d) Existe um valor de $k$ para qual a transformação $T$ **não** é diagonalizável? Justifique.

3. Considere duas transformações lineares $T : E \to E$ e $S : E \to E$.

*½ pto* (a) Defina o que é um autovetor $\mathbf{v}$ de $S \circ T$ associado ao autovalor $\lambda$.

*1 pto* (b) Mostre que se $\mathbf{v}$ é um autovetor de $S \circ T$ associado a um autovalor $\lambda \neq 0$, então $T(\mathbf{v})$ é um autovetor de $T \circ S$ associado ao mesmo autovalor $\lambda$. Explicite onde você usou a hipótese $\lambda \neq 0$.

*1 pto* (c) Mostre que se $0$ é autovalor de $S \circ T$, então $0$ é autovalor de $T \circ S$.
*(Dica: use determinantes!)*

*1 pto* (d) Verdadeiro ou falso: se $\lambda$ é autovalor de $S$ e $\mu$ é autovalor de $T$, então $\lambda + \mu$ é autovalor da transformação $S + T$.
*(Lembre que $S + T : E \to E$ é definida por $(S+T)(\boldsymbol{u}) = S(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u})$.)*