Álgebra Linear I – MAT1200
Prova P2 – 18 out 2014 (2014.2)

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	1	2	3	Total
Valor	$3\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	10
Grau (Revisão)				

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30 min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta.
- As respostas podem ser escritas a lápis.
- Não é permitido o uso de calculadora;
- Esta prova possui 2 páginas, contando com a capa.
- As respostas podem ficar a lápis.

1. À questão "Dado $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}$ fixo, a transformação $T\colon \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathcal{M}_{3\times 1}$ dada por $T(A) = A\,\mathbf{v}$ é linear?", Andrezinho respondeu da seguinte maneira:

> É linear pois, como o produto de matrizes é distributivo, temos para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ e $k \in \mathbb{R}$:
> . $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = A\,(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = A\,\mathbf{v} + A\,\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$ e
> . $T(k\cdot\mathbf{v}) = A\,(k\cdot\mathbf{v}) = k\cdot(A\,\mathbf{v}) = k\cdot T(\mathbf{v})$.

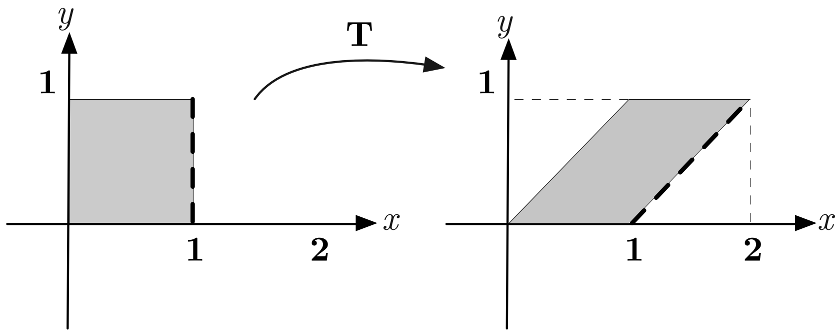
1 pto (a) Embora T seja realmente uma transformação linear, a justificativa do Andrezinho não está correta. Qual foi o erro que ele cometeu?

½ pto (b) Mostre que T é linear.

1 pto (c) Existe algum $\mathbf{v}$ tal que T seja injetiva?

1 pto (d) Determina uma base do núcleo e uma base da imagem de T quando $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pela figura abaixo:



1 pto (a) Determine uma expressão para a imagem $T(x,y)$ de um vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1 pto (b) Determine $[T]_{\beta\leftarrow\gamma}$ onde $\beta = \{\,(1,0)\,,(0,1)\,\}$ e $\gamma = \{\,(1,1)\,,(1,-1)\,\}$.

1 pto (c) Determine as matrizes de mudança de base de β para γ e de γ para β.

3. Uma transformação linear $T\colon E \to E$ é chamada de projeção quando $T\circ T = T$, e de simetria quando $T \circ T = Id$ (onde Id é a transformação identidade).

1 pto (a) Determine se as transformações abaixo são projeções ou simetrias:
$T_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_1\,(x,y) = (y,x)$,
$T_2\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ dada por $T_2\,(a + b\cdot X + c\cdot X^2) = a + c\cdot X^2$.

½ pto (b) Seja $P\colon E \to E$ uma projeção. Mostre que a transformação linear $S\colon E \to E$ dada por $S(\mathbf{v}) = 2\cdot P(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$ é uma simetria.

½ pto (c) Mostre que se $P\colon E \to E$ é uma projeção, então $\forall \mathbf{v} \in E$, $\mathbf{v} - P(\mathbf{v}) \in \operatorname{Nuc}(P)$.

½ pto (d) Seja $P\colon E \to E$ uma projeção. Mostre que se $\mathbf{v} \in \operatorname{Im}(P)$, então $\mathbf{v} = P(\mathbf{v})$.

1 pto (e) Supondo que E tenha dimensão finita, mostre que para toda projeção P temos $E = \operatorname{Nuc}(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.
Dica: Observe que todo $\mathbf{v} \in E$ pode ser escrito como $\mathbf{v} = (\mathbf{v} - P(\mathbf{v})) + P(\mathbf{v})$.