

MAT 1200: Álgebra Linear I
Prova P1 — 2014.2: 13 de Setembro de 2014



Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa e de preferência sucinta. As respostas podem ser escritas a lápis. Tempo: 1h50.

Nome: _____

Turma: _____ Matrícula: _____

Questão	1	2	3	Total
Pontos	3	3½	3½	10
Correção				

1. Em uma prova de Álgebra Linear, foi perguntado se o elemento neutro pertencia ao conjunto $W \subset \mathcal{P}_2$ definido por

$$W = \{ p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c : a \leq b \text{ e } c = 0 \} \quad ,$$

onde \mathcal{P}_2 é o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Andrezinho respondeu da seguinte maneira:

Sim, $0 \in W$, pois um elemento genérico $p(x)$ de W tem seu coeficiente constante $c = 0$. Assim é da forma:

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x \quad ,$$

e, portanto, $p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 = 0$.

- 1 *pto* (a) Defina o que significa V ser subespaço vetorial de um espaço vetorial $(E, \mathbb{R}, +, \cdot)$.
 1 *pto* (b) Determine se W é subespaço vetorial de \mathcal{P}_2 .
 1 *pto* (c) Qual foi o erro cometido por Andrezinho?

2. Suponha que ao resolver um certo sistema linear tenhamos encontrado como solução o conjunto

$$S = \{ (0, 1, 0, 0) + t \cdot (1, 0, 2, 1) + s \cdot (1, -1, 0, -1) : t, s \in \mathbb{R} \} \quad .$$

- 1 *pto* (a) O sistema linear resolvido poderia ser homogêneo? **Justifique.**
 1 *pto* (b) Encontre um sistema linear cujo conjunto de soluções seja S .
 1 *pto* (c) É possível descrever o mesmo conjunto S com um número menor de equações que as obtidas no item anterior? **Justifique.**
 1/2 *pto* (d) Encontre, **justificando**, $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema formado pelas equações obtidas no item (b) juntamente com a equação $y = k$ tenha como solução a reta

$$R = \{ (0, 1, 0, 0) + t \cdot (1, 0, 2, 1) : t \in \mathbb{R} \} \quad .$$

3. Analise a seguinte proposição:

Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de vetores linearmente independente, então $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\}$ é linearmente independente para qualquer $j \leq k$.

- 1/2 *pto* (a) Identifique qual é a hipótese e qual é a conclusão (tese) da proposição.
 1 *pto* (b) Defina o que significa um conjunto de vetores ser linearmente independente.
 1 *pto* (c) Mostre que a proposição é verdadeira.
 1 *pto* (d) Considere a seguinte proposição:

A união de dois conjuntos linearmente independentes ainda é um conjunto linearmente independente.

Esta proposição é verdadeira ou falsa? Se for verdadeira, prove-a. Se for falsa, apresente um contra-exemplo.