PUC-RIO – CB-CTC

FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO –17.09.14 –quarta-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:______________________________________Turma:________________

NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,5		
3ª Questão	3,0		
Total	10,0		

A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.

Formulário e constantes físicas.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}$$

$$\varepsilon_0 \approx 9\cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2}$$

Superfície esfera = $4\pi\, R^2$

Volume esfera = $\frac{4}{3}\pi\, R^3$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

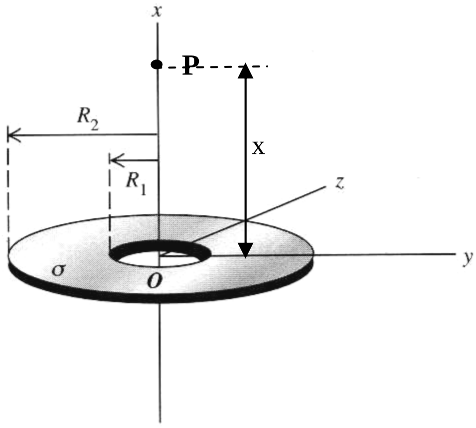
$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO – 17.09.14 – quarta-feira

1ª Questão: (3,5)

Denomina-se *coroa anular* um disco fino de raio externo R_2 com um buraco circular concêntrico de raio interno R_1 como mostrado em figura. Uma coroa anular possui uma densidade superficial de carga σ sobre sua superfície ($\sigma < 0$).

a) (**0.75**) Determine a carga total **Q** sobre a coroa anular.



b) (**1.0**) A coroa anular está sobre o plano *yz* com seu centro na origem. Para um ponto arbitrário P sobre o eixo *Ox* (eixo de simetria da coroa anular), determine o potencial V(P) (*Sugestão: calcule o potencial devido a um anel de raio r e espessura dr compreso entre R_1 e R_2 e depois extenda o resultado para a coroa anular*).

c) (**1.0**) Calcule agora o campo elétrico $\vec{E}$ (módulo, direção e sentido) no ponto P.

d) (**0.75**) Uma carga positiva puntiforme q é inicialmente colocada a repouso no ponto P e a seguir liberada. Qual será a energia cinética T desta carga quando passa no centro *O* da coroa anular ? (Considere neste item R_1=a; R_2=4a; x=3a)

a) $Q = S\sigma \qquad S = \pi (R_2^2 - R_1^2)$

$Q = \pi\sigma (R_2^2 - R_1^2) < 0$

b) Considere um anel de raio $R_1 < r < R_2$ e espessura dr.

A carga infinitesima de um anel é $dq^{ANEL} = 2\pi r \sigma \, dr$

O potencial gerado por um anel infinitesimo num ponto sobre o eixo X é

$$dV(x) = \frac{k \, dq^{ANEL}}{\sqrt{r^2 + x^2}} = 2\pi k \sigma \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr$$

$$V(x) = 2\pi K \sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}\, dr = 2\pi K \sigma \sqrt{x^2 + r^2}\,\Big|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= 2\pi K \sigma \left[\sqrt{x^2 + R_2^2} - \sqrt{x^2 + R_1^2} \right]$$

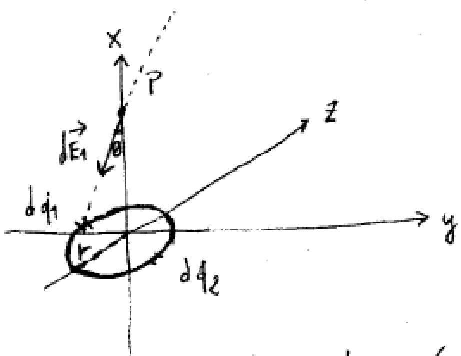
c) Por simetria o campo elétrico num ponto sobre o eixo X é paralelo ao eixo X mesmo.

$$\vec{E} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}\,\hat{i} = -2\pi K \sigma \left[\frac{2x}{2\sqrt{(x^2 + R_2^2)}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + R_1^2}} \right] \hat{i} =$$

$$= -2\pi K \sigma x \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} \right] \hat{i}$$

2

Alternativamente:



Considero um anel de carga com carga total negativa. O elemento infinitesimo de carga dq_1 gera no ponto P um campo elétrico $d\vec{E}_1$ com intensidade

$$|d\vec{E}_1| = \frac{K|dq_1|}{r^2 + x^2}$$

Para a simetria do anel existe uma outra carga dq_2 diametralmente oposta a primeira que gera no ponto P um campo $d\vec{E}_2$ com componente horizontal (no plano yz) igual e oposta a aquela do campo $d\vec{E}_1$, assim que

$$\therefore \quad d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = d\vec{E}_x$$

$$dE_{1_x} = -|d\vec{E}_1| \cos\theta = -|d\vec{E}_1| \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} = -\frac{K\,|dq_1|\,x}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{K x\, dq_1}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

porque $dq_1 < 0$

$$\therefore \vec{E}(P) = \int dE_{1_x}\,\hat{i} = \frac{K x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \int dq_1 = \frac{K x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\, Q_{anel}\ \hat{i}$$

Nesse sentido, o campo elétrico gerado por um anel infinitesimal com carga dq que compõe a coroa anular é $d\vec{E}(P) = \frac{K x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\, dq\ \hat{i} = \frac{2\pi K \sigma r x\, dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ \hat{i}$,

assim que o campo gerado pela coroa anular é $\vec{E}(P) = \int d\vec{E}(P) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi K \sigma r x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\, dr\ \hat{i} =$

$$= -2\pi\sigma K x \left.\frac{1}{\sqrt{(r^2+x^2)}}\right|_{R_1}^{R_2} \hat{i} = -2\pi K \sigma x \left[\frac{1}{(x^2+R_2^2)^{1/2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}\right]\hat{i}$$

d) Vale a conservação da energia mecanica ou seja

$$T_i + U_i = T_f + U_f$$, aonde T = Energia Cinética

U = Energia Potencial

$$T_f = T_i - (U_f - U_i) = T_i - \Delta U$$

$$\begin{cases} T_i = 0 \\ \Delta U = q\,\Delta V \end{cases}$$

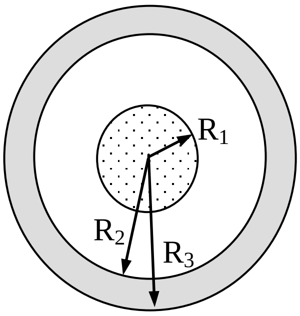
$$T_q = -q\Delta V = -q\left[V(0) - V(x)\right] =$$

$$= -2\pi K b q\left[R_2 - R_1 + \sqrt{x^2+R_1^2} - \sqrt{x^2+R_2^2}\right] =$$

$$= -2\pi K b q\left[4a - a + \sqrt{9a^2+a^2} - \sqrt{9a^2+16a^2}\right] =$$

$$= -2\pi K b q\left[3a - 5a + \sqrt{10}\,a\right] = -2\pi K b q\left[(\sqrt{10}-2)\,a\right] > 0$$

2ª Questão: (3,5)



Uma esfera isolante maciça de raio R_1= 2 m possui uma densidade de carga <u>não uniforme</u> dada pela expressão: $\rho(r) = B \cdot r$ onde a constante B é desconhecida. Esta esfera isolante é concentricamente circundada por uma fina casca esférica condutora com raios interno R_2 = 4m e externo R_3 = 6m, como mostrado na figura ao lado.

O fluxo elétrico através de uma superfície esférica gaussiana de raio r > R_3 vale ϕ_3 = 4 x 10^6 N m^2/C. Sabendo que a carga líquida depositada na casca esférica vale Q_{Liq} = 12 μC:

a) (**1.0**) Calcule o valor da carga total Q_1 da esfera maciça interna.

b) (**0.5**) Calcule o valor da constante B com as unidades.

c) (**0.5**) Calcule a razão $\sigma_{ext}/\sigma_{int}$ entre as densidades de carga interna e externa da casca esférica condutora.

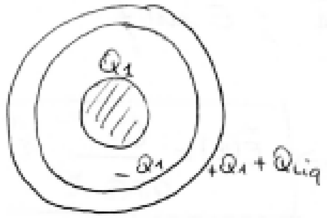
d) (**0.5**) Utilizando a lei de Gauss, calcule o vetor campo elétrico na região R1 < r < R_2.

e) (**1.0**) Calcule a diferença de potencial (V_{R1} – V_{R2}), com sinal, entre a esfera interna e a casca esférica.

SOLUÇÃO Por Gauss

a) $$\phi_3 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = 4 \cdot 10^6 \ \frac{Nm^2}{C} \Rightarrow Q_i = \varepsilon_0 \cdot 4 \cdot 10^6$$

$$Q_i = 9 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^6 = 36 \cdot 10^{-6} C = 36 \mu C$$



$$Q_i = Q_1 + Q_{Liq} = 36 \mu C$$

$$Q_1 = 36 \mu C - Q_{Liq} = 36 \mu C - 12 \mu C$$

$$\boxed{Q_1 = 24 \mu C}$$

b) $$\rho(r) = B \cdot r \qquad \rho = \frac{Q}{Vol} = \frac{dq}{dVol} \Rightarrow dq = \rho(r)\, dVol$$

$$dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

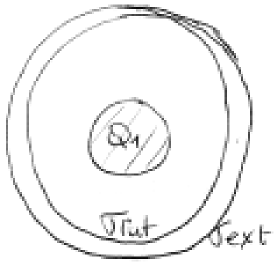
$$Q_1 = \int_0^{R_1} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr \Rightarrow$$

$$Q_1 = \int_0^{R_1} B \cdot r \, 4\pi r^2 dr = B 4\pi \int_0^{R_1} r^3 dr = \frac{B \cancel{4}\pi R_1^4}{\cancel{4}}$$

$$Q_1 = B \pi R_1^4 \quad \text{sendo } Q_1 = 24 \mu C$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{Q_1}{\pi R_1^4} = \frac{24 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 16} = \frac{3}{2\pi} \cdot 10^{-6} \ C/m^4}$$

c)



$$\sigma_{ext} = \frac{Q_{Liq} + Q_1}{4\pi R_3^2} = \frac{36 \mu C}{4\pi \ 6^2} \ C/m^2$$

$$\sigma_{int} = \frac{-Q_1}{4\pi R_2^2} = -\frac{24 \mu C}{4\pi \ 4^2} \ C/m^2$$

$$\frac{\sigma_{ext}}{\sigma_{int}} = \frac{36 \cancel{\mu C}}{\cancel{4\pi}\ 6^2} \cdot \left(- \frac{\cancel{4\pi} 4^2}{24 \cancel{\mu C}} \right) = - \frac{\cancel{16}}{24} = - \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_{ext}}{\sigma_{int}} = - \frac{2}{3}}$$

d) Utilizando uma gaussiana de raio "r" : $R_1 \leq r < R_2$

$$\phi_S = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad \bar{E} \parallel d\bar{A} \;;\; E \text{ unif.}$$

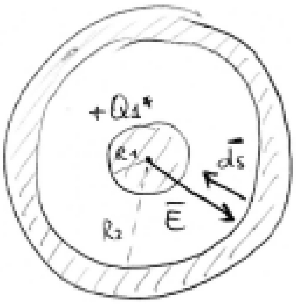
$$\oint E\,dA = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad E\,4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \implies \boxed{\bar{E}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

e) $V_{R_1} - V_{R_2} = ?$ Lembrando que:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

$$V_{R_1} - V_{R_2} = -\int_{R_2}^{R_1} \bar{E} \cdot d\bar{s} = +\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = +\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{R_1}.$$

($d\bar{s}$ vai de $R_2 \to R_1$, contrário à direção do $\bar{E}$)



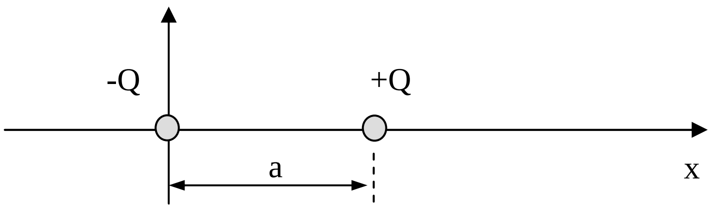
$$\Downarrow$$

$$\boxed{V_{R_1} - V_{R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]}$$

$V_{R_1} - V_{R_2} < 0$

3ª Questão: (3,0)

Um dipolo elétrico é colocado no eixo x com +Q em x = a e –Q em x = 0.



a) (**1,0**) Calcule o potencial elétrico num ponto qualquer do eixo x para x > a. Considere o referencial de potencial nulo no infinito.

b) (**1,0**) Apesar do potencial da letra a não ser genérico, mesmo assim podemos, a partir dele, encontrar uma componente do campo elétrico. Responda qual é esta componente e calcule-a.

c) (**1,0**) Se uma carga pontual q for colocada no ponto x = 3a, calcule a força elétrica sobre ela e a energia potencial associada à configuração.

Solução

a) $V(x) = \frac{KQ}{x-a} - \frac{KQ}{x} \quad V(x) = KQ\frac{a}{x^2 - ax}$ [V].

b) O potencial no eixo x só depende de x e assim só podemos calcular a componente x do campo elétrico.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -KQ\frac{-2xa}{(x^2 - ax)^2} \quad E_x = KQ\frac{2xa}{(x^2 - ax)^2} \text{ [V/m]}$$

c) $F_x = qE_x$ [N] e $U_p = qV$ [J].