Gabarito T3 - Versão I

Questão 1.

(a) $f'(x) = (12x^2+1)\,\text{sen}\,(x^2-2) + (4x^3+x)\cos(x^2-2)2x$

(b) $g'(x) = \dfrac{(2-3x^4)\,(5x^4\cos(2x) + x^5(-\text{sen}\,(2x))2) - x^5\cos(2x)(-12x^3)}{(2-3x^4)^2}$

(c) $h'(x) = 6\,\text{sen}\,(\cos(x^5-5x+7))\,\cos(\cos(x^5-5x+7))(-\text{sen}\,(x^5-5x+7))(5x^4-5)$

Questão 2. Seja t_0 o instante em que $V'(t_0) = 3\text{m}^3/\text{min}$ e $h(t_0) = 3\text{m}$. Como $r = h$ temos que o volume do cone é dado por $V(t) = \dfrac{\pi(h(t))^3}{3}$. Então,

$$V'(t) = \frac{\pi 3(h(t))^2 h'(t)}{3} \therefore V'(t_0) = \pi(h(t_0))^2 h'(t_0) \therefore 3 = \pi(3)^2 h'(t_0) \therefore h'(t_0) = \frac{1}{3\pi}.$$

Portanto, $h'(t_0) = \dfrac{1}{3\pi}\text{m/min}$.

Questão 3. Para encontrar os pontos de tangência das funções f e g, basta resolver o seguinte sistema de equações: $f(x) = g(x)$ e $f'(x) = g'(x)$. Segue da primeira equação que:

$$3x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x + 1 = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 8x - 1 \therefore 2x^4 - 4x^2 + 2 = 0 \therefore$$
$$\therefore x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \therefore (x^2-1)^2 = 0 \therefore x^2 - 1 = 0 \therefore x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Por outro lado, segue da segunda equação que:

$$12x^3 + 6x^2 - 20x - 8 = 4x^3 + 6x^2 - 12x - 8 \therefore 8x^3 - 8x = 0 \therefore$$
$$\therefore 8x(x^2-1) = 0 \therefore x = 0,\ x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Logo, os valores de x dos pontos de tangência são $x = 1$ e $x = -1$.

Questão 4.

(a) Primeiramente, note que $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(-2x) - (4-x^2)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-10x}{(x^2+1)^2}$. Então,

$$f'(x) > 0 \therefore -10x > 0 \therefore x < 0,$$

e, portanto, a função f é crescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

(b) Segue do item (a) que $f''(x) = \dfrac{(x^2+1)^2(-10) - (-10x)(2(x^2+1)2x)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{10(3x^2-1)}{(x^2+1)^4}$.
Logo,

- $f''(x) > 0 \therefore 10(3x^2-1) > 0 \therefore 3x^2 - 1 > 0 \therefore x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$; e
- $f''(x) < 0 \therefore 10(3x^2-1) < 0 \therefore 3x^2 - 1 < 0 \therefore x \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Assim, a coordenada x dos pontos de inflexão são $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Gabarito T3 - Versão II

Questão 1.

(a) $f'(x) = (12x^3 - 1)\,\text{sen}\,(x^2 - 4) + (3x^4 - x)\cos(x^2 - 4)2x$

(b) $g'(x) = \dfrac{(3 - 2x^4)\,(4x^3\cos(3x) + x^4(-\text{sen}\,(3x))3) - x^4\cos(3x)(-8x^3)}{(3 - 2x^4)^2}$

(c) $h'(x) = 8\,\text{sen}\,(\cos(x^5 - 3x + 6))\ \cos(\cos(x^5 - 3x + 6))(-\text{sen}\,(x^5 - 3x + 6))(5x^4 - 3)$

Questão 2. Seja t_0 o instante em que $V'(t_0) = 4\text{m}^3/\text{min}$ e $h(t_0) = 2\text{m}$. Como $r = h$ temos que o volume do cone é dado por $V(t) = \dfrac{\pi(h(t))^3}{3}$. Então,

$$V'(t) = \frac{\pi 3(h(t))^2h'(t)}{3} \therefore V'(t_0) = \pi(h(t_0))^2h'(t_0) \therefore 4 = \pi(2)^2h'(t_0) \therefore h'(t_0) = \frac{1}{\pi}.$$

Portanto, $h'(t_0) = \dfrac{1}{\pi}\text{m/min}$.

Questão 3. Para encontrar os pontos de tangência das funções f e g, basta resolver o seguinte sistema de equações: $f(x) = g(x)$ e $f'(x) = g'(x)$. Segue da primeira equação que:

$$5x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 8x + 2 = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 8x - 2 \therefore 4x^4 - 8x^2 + 4 = 0 \therefore$$
$$\therefore x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \therefore (x^2 - 1)^2 = 0 \therefore x^2 - 1 = 0 \therefore x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Por outro lado, segue da segunda equação que:

$$20x^3 + 6x^2 - 32x - 8 = 4x^3 + 6x^2 - 16x - 8 \therefore 16x^3 - 16x = 0 \therefore$$
$$\therefore 16x(x^2 - 1) = 0 \therefore x = 0,\ x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Logo, os valores de x dos pontos de tangência são $x = 1$ e $x = -1$.

Questão 4.

(a) Primeiramente, note que $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 2)(-2x) - (3 - x^2)2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{-10x}{(x^2 + 2)^2}$. Então,

$$f'(x) > 0 \therefore -10x > 0 \therefore x < 0,$$

e, portanto, a função f é crescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

(b) Segue do item (a) que $f''(x) = \dfrac{(x^2 + 2)^2(-10) - (-10x)(2(x^2 + 2)2x)}{(x^2 + 2)^4} = \dfrac{10(3x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^4}$.
Logo,

- $f''(x) > 0 \therefore 10(3x^2 - 2) > 0 \therefore 3x^2 - 2 > 0 \therefore x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$; e

- $f''(x) < 0 \therefore 10(3x^2 - 2) < 0 \therefore 3x^2 - 2 < 0 \therefore x \in \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Assim, a coordenada x dos pontos de inflexão são $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ e $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.