Lista 3 Álgebra Linear I
MAT 1200 — 2014.2
Data: 22 de Agosto de 2014

Recomendamos que essa lista seja feita depois de terem sido feitos os exercício de fixação (Fix) e os problemas (Prob) dos capítulos 1 e 2 do livro. É uma boa ideia também tentar escrever a definição formal dos conceitos que são abordados em cada questão.

Ao lado do número de cada questão há uma indicação do nível de dificuldade:

F	=	Fácil
M	=	Médio
D	=	Difícil
J	=	Jedi Master.

É claro que essa indicação é subjetiva: cada um tem dificuldades em aspectos diferentes da matéria.

Questões "Andrezinho"

1. Em uma prova de álgebra linear, pedia-se que se representasse parametricamente um plano π contendo os pontos $(1, 2, 0), (0, 1, 1), (3, 4, -2)$.

   Andrezinho forneceu a seguinte "solução":

   > Podemos escolher $\mathbf{p} = (3, 4, -2)$ e os vetores diretores $\mathbf{u} = (3, 4, -2) - (0, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (3, 4, -2) - (1, 2, 0)$. A parametrização do plano será, portanto:
   >
   > $$\pi = \{\mathbf{p} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) [F] Existe um único plano contendo os pontos dados?

   (b) [M] Explique a Andrezinho por que a solução dele está errada (não estamos pedindo que você diga qual é a maneira correta de resolver, mas sim onde está o erro do aluno).

   (c) [M] Encontre uma parametrização para um plano π como o do enunciado.

2. Em uma prova de álgebra linear, era pedido que escrevessem na forma paramétrica o conjunto-solução $S \subset \mathbb{R}^4$ do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y &= 0 \\ x - w &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{cases}$$

Andrezinho forneceu a seguinte "solução":

> Escolhendo $x = t$ e $y = s$ como parâmetros, concluímos, das equações do sistema, que
>
> $$\begin{cases} x = 2y & \Rightarrow & x = 2s \\ w = x & \Rightarrow & w = t \\ z = -2y & \Rightarrow & z = -2s \end{cases}$$
>
> Assim, um vetor no conjunto solução será da forma
>
> $$(x, y, z, w) = (2s, s, -2s, t) = s(2, 1, -2, 0) + t(0, 0, 0, 1).$$
>
> Conclui-se que
>
> $$S = \text{span}\{(2, 1, -2, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

(a) [D] Explique a Andrezinho por que a solução dele está errada (não estamos pedindo que você diga qual é a maneira correta de resolver, mas sim onde está o erro do aluno).

(b) [F] Encontre uma parametrização para conjunto-solução S.

3. Em uma das questões da P1 do semestre passado, pedia-se para provar que se

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$$

é um conjunto LI e se

$$w \notin \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\},$$

então o conjunto $\{w, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ também é um conjunto LI.

Andrezinho, assim como a maioria dos alunos, deu a seguinte "solução":

> Como $w \notin \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, então w não é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_k$. Assim, ele não é redundante. Como, por hipótese, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é LI, então nenhum dos vetores v_j é redundante. Como não há vetores redundantes em $\{w, v_1, \ldots, v_k\}$, trata-se de um conjunto LI.

(a) [J] Embora Andrezinho tenha mostrado algum conhecimento da matéria, sua demonstração está errada. Identifique qual foi o erro.

(b) [J] Faça uma demonstração correta da proposição no enunciado da questão (dica: use a definição original de independência linear e não o fato de que um conjunto é LI se, e somente se, não há vetores redundantes).

Dependência linear e espaços gerados

4. Sejam v_1, v_2, v_3 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.

   (a) [M] Prove que os vetores $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$, $v_1 + v_3$ são também linearmente independentes.

   (b) [F] É possível que algum dos vetores v_1, v_2, v_3 seja o vetor nulo? Justifique.

5. Considere dois vetores não paralelos v_1 e v_2 em $\mathbb{R}^{20}$.

   (a) [M] Prove que os vetores $v_1 + v_2$ e $v_1 - v_2$ são linearmente independentes.

   (b) [F] O subespaço gerado pelos vetores $v_1 + v_2$ e $v_1 - v_2$ é um plano de $\mathbb{R}^{20}$ que denotaremos por π. Encontre uma representação paramétrica para π.

   (c) [F] Qual é o número mínimo de equações lineares que precisamos para descrever um plano em $\mathbb{R}^{20}$?

6. Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$ e seja $w \notin \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Note que $n > 4$.

   (a) [F] w pode ser o vetor nulo? Justifique.

   (b) [M] Prove que os vetores $w+v_1, w+v_2, w+v_3, w+v_4$ são linearmente independentes.

   (c) [D] $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \operatorname{span}\{w + v_1, w + v_2, w + v_3, w + v_4\}$? Justifique.

Espaços afins e sistemas lineares

7. Considere os seguintes espaços afins:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(1,0,0,1) + t(1,0,1,0) : t \in \mathbb{R}\}, \\
B &= \{t(1,2,3,4) + s(1,-1,1,-1) + k(5,1,9,5) : t, s, k \in \mathbb{R}\}, \\
C &= \{(2,0,1,1) + t(-1,1,3,2) + s(0,0,1,1) : s, t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

   (a) [F] Determine a dimensão de A, B e C.

(b) [M] Encontre um sistemas linear cuja solução seja A. Faça o mesmo para os conjuntos B e C.

(c) [M] Determine $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$

(d) [F] "A interseção de dois planos não pode ser um único ponto". Falso ou verdadeiro? Justifique.

Chamamos de *hiperplano* um espaço afim em $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$ (podemos dizer equivalentemente que ele tem *codimensão* igual a 1). Hiperplanos podem ser representados como conjunto-solução de uma equação com n variáveis. Assim, a solução de um sistema de k equações e n variáveis pode ser interpretado como a interseção de k hiperplanos em $\mathbb{R}^n$.

8. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - y + z - w &= 1 \\ y - 2w &= 0 \\ x - z &= 1 \end{cases}$$

(a) [F] Escreva-o na forma matricial.

(b) [F] Determine a dimensão da interseção entre os hiperplanos:

$$\pi_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z - w = 1\},$$
$$\pi_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - 2w = 0\},$$
$$\pi_3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 1\}.$$

(c) [F] Mostre que $(1, 0, 1) \in \operatorname{span}\{(2, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1), (-1, -2, 0)\}$.

(d) [M] Qual é a relação entre os três itens anteriores?

9. [D] Mostre que o espaço afim

$$u + \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

contém a origem se, e somente se, $u \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

10. Considere o sistema de equações lineares não homogêneo $A \cdot x = b$, em que $A \in \mathcal{M}_{m\times n},\ x \in \mathcal{M}_{n\times 1},\ b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$.

Suponha que ele seja possível e denote por S o conjunto das suas soluções. Denote também por S_0 o conjunto das soluções do sistema homogêneo associado $A \cdot x = 0$.

(a) [F] Prove que se $x, x' \in S$, então $x - x_0 \in S_0$.

(b) [F] Prove que se $x \in S$ e $x_0 \in S_0$, então $x + x_0 \in S$.

(c) [D] Conclua que, dada uma solução particular qualquer x_p do sistema não homogêneo, qualquer outra solução será a soma de x_p com alguma solução do homogêneo associado, ou seja:

$$S = \{x_p + x_0 : Ax_0 = 0\}.$$

11. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) [M] Encontre todas as soluções do sistema homogêneo associado.

(b) [F] Sabendo que $(1, -1, 1)$ é solução do sistema não homogêneo dado acima, encontre todas as soluções deste sistema.

Espaços vetoriais e subespaços

12. [D] Mostre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ não é espaço vetorial com as operações $+$ e $\cdot$ definidas em cada item abaixo. Em cada caso, diga qual (ou quais) axioma(s) de espaço vetorial não vale(m).

(a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda a, b)$;

(b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$;

(c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.

13. [M] Mostre que $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$ com as operações usuais de $\mathbb{R}^2$ de soma de vetores e multiplicação de vetores por escalares reais não é um espaço vetorial, explicitando qual (ou quais) axioma de espaço vetorial não é satisfeito.

14. *Neste exercício você verificará que um subconjunto de um espaço vetorial dado* **pode ou não** *ser um espaço vetorial, dependendo das operações de soma e produto por escalares nele considerados. No item a, as operações são herdadas do espaço ambiente. No item b, definimos* **novas** *operações de soma e produto por escalares, diferentes das operações do espaço ambiente. Entretanto, em ambos os casos S não será subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$,* **mas por motivos diferentes**.

Considere $S = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) [D] Sejam

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

as operações usuais de soma e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^3$. Prove que essas operações não fazem de S um espaço vetorial. Conclua que $(S, +, \cdot)$ não é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

(b) [D] Sejam $\hat{+} : S \times S \longrightarrow S$ e $\hat{\cdot} : S \times S \longrightarrow S$ definidas por

$$(x, y, 1)\hat{+}(x', y', 1) = (x + x', y + y', 1)$$

e

$$\lambda\hat{\cdot}(x, y, 1) = (\lambda x, \lambda y, 1).$$

Prove que $(S, \hat{+}, \hat{\cdot})$ é um espaço vetorial, mas ele não é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

O conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ das matrizes $m \times n$ com as operações que definimos de soma e produto por escalar forma um espaço vetorial (reflita). As questões que seguem tratam de subespaços vetoriais de $\mathcal{M}_{m\times n}$.

15. O *traço* de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é o número real

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Considere $W = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3} \,:\, \operatorname{tr}(A) = 0\}$ com as operações usuais de soma de matrizes e produto de matriz por escalar.

(a) [M] Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}$.

(b) [D] Calcule a dimensão de W.

(c) [D] Encontre um subespaço vetorial $U \subset W$ de dimensão 3.

(d) [M] Seja $D = \{A \in W \,:\, A \text{ é matriz diagonal}\}$. Mostre que D é um subespaço vetorial de W e calcule sua dimensão.

16. [M] Determine se cada um dos subconjuntos $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}$ abaixo com as operações usuais de soma de matrizes e produto de matrizes por escalares reais é espaço vetorial. Se sim, calcule sua dimensão. Se não, explicite qual (ou quais) axioma de espaço vetorial não vale.

(a) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \,:\, a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0\}$;

(b) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \,:\, a_{11}^3 + a_{22}^3 = 0\}$;

(c) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \,:\, a_{11}^2 - a_{22}^2 = 0\}$

Espaço de polinômios

É importante salientar que um polinômio não precisa, em geral, ser interpretado como uma função real. Um polinômio é simplesmente uma combinação linear de símbolos $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$, não precisamos nos preocupar se x representa algum número ou qualquer outra coisa. Assim, quando queremos resolver uma igualdade de polinômios, NÃO ESTAMOS PEDINDO QUE SE RESOLVA UMA EQUAÇÃO EM x. O que queremos é que os respectivos coeficientes sejam iguais.

No exemplo 3.37 (pág. 80) do livro, é pedido que se prove que os polinômios $1, t$ e t^2 são linearmente independetes. A solução apresentada pelo livro usa a interpretação de polinômos como funções reais. Embora essa demonstração esteja correta, ela não ajuda na compreensão do que significa o espaço de polinômios. Leia a solução do livro e depois veja a minha solução:

Para que $\{1, t, t^2\} \subset \mathcal{P}_2$ seja um conjunto LI, precisamos que

$$a \cdot 1 + b \cdot t + c \cdot t^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Repare que, no lado esquerdo da implicação, estamos igualando o polinômio $a + bt + ct^2$ ao polinômio nulo, cujos coeficientes em 1, t e t^2 são todos nulos. Ora, se

$$a + bt + ct^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2,$$

é porque $a = b = c = 0$. E acabou. Está provado que $\{1, t, t^2\}$ é LI. Repare que não interpretar polinômios como funções reais deixou o exercício muito mais simples e direto.

17. [M] Verifique se os seguintes conjuntos são LD ou LI:
    (a) $\{x, x + 2, x^2 - 1\}$
    (b) $\{x + 1, x - 1, x\}$
    (c) $\{1 - x, 2 + x, 5, x^2 - 2x\}$

18. [F] Mostre que $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$.

Na questão a seguir, usaremos a interpretação de polinômios como funções reais para podermos definir suconjuntos de $\mathcal{P}_n$.

19. [M] Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços vetoriais.
    (a) $\{p \in \mathcal{P}_4 : p(17) = 0\}$
    (b) $\{p \in \mathcal{P}_3 : p(0) = 1\}$

Operações com subespaços

Lembrando: Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vetorial e W, V subespaços de E. Definimos a *soma* de W e V por

$$W + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}.$$

Podemos interpretar a soma de W e V como o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em W e V. Assim, a soma de duas retas (passando pela origem, afinal são subespaços!) não coincidentes será um plano.

Quando a interseção de W e V for apenas o vetor nulo, dizemos que a soma é *direta* e a denotamos por $W \oplus V$.

20. [J] Sejam W e V subespaços de $(E, +, \cdot)$.
    (a) Mostre que a soma de V e W é direta se, e somente se, todo vetor em $V + W$ for escrito de forma <u>única</u> como a soma de um vetor em V com um vetor em W.
    (b) Mostre que a soma de V e W é **não** direta se, e somente se, qualquer vetor em $V + W$ puder ser escrito de infinitas maneiras distintas como soma de um vetor em V com um vetor em W.