Exercícios Adicionais - Conjuntos e Operações com Vetores

15/08/2014

1. Considere os conjuntos

$$A = \{u \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } u = t(-1,1,1) + (1,0,0)\}$$

e

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y - z = 0\}.$$

   (a) O que são geometricamente os conjuntos A e B? Se possível faça um esboço de ambos.

   (b) Verifique que $A \subset B$.

   Lembre que você precisa tomar genericamente um elemento de A (ou seja, que satisfaz à condição que define os elementos de A) e verificar que este elemento também verifica as condições que definem os elementos de B.

   (c) $A = B$? Justifique.

   Se sua resposta for **sim**, *para justificar basta você verificar que $B \subset A$, pois no item anterior já verificou-se que $A \subset B$. Se sua resposta for* **não**, *você precisa mostrar que algum elemento de B não é elemento de A. Basta você encontrar explicitamente um desses elementos.*

   (d) O conjunto A intersecta os planos xy, xz ou yz? Se sim, em qual(is) ponto(s)?

2. Julgue verdadeiras ou falsas as afirmações a seguir. Se verdadeira, justifique. Se falsa, exiba um exemplo no qual ela falha (o chamado *contra-exemplo*).

   (a) Se $u = (1,2)$ e $v = (-2,-4)$, então a única forma de obter $(0,0)$ como resultado da operação $su + tv$ é colocando $s = 0$ e $t = 0$.

   (b) Se $u = (1,2)$ e $v = (-2,1)$, então a única forma de obter $(0,0)$ como resultado da operação $su+tv$ é colocando $s = 0$ e $t = 0$.

   (c) Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $v \neq 0$. Dada uma reta parametrizada $\mathfrak{r} = \{tv + w\,;\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$, sempre tem-se $v \in \mathfrak{r}$.

   (d) Para a mesma reta do item c), sempre tem-se que $w \in \mathfrak{r}$.

   (e) Lembre que o vetor u é *paralelo* ao vetor v se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $u = kv$.
   Portanto qualquer vetor $w \in \mathbb{R}^n$ é paralelo a si mesmo.

   (f) Sejam u, v, w vetores de $\mathbb{R}^n$. Se u é paralelo a v e v é paralelo a w, então u é paralelo a w.

   (g) O vetor nulo $(0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ é paralelo a qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$.

   (h) Qualquer vetor $w \in \mathbb{R}^n$ é paralelo ao vetor nulo $(0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$.

   (i) Sejam u, v, w vetores de $\mathbb{R}^n$. Se u não é paralelo a v e v não é paralelo a w, então u não é paralelo a w.

   (j) Fixe dois vetores não paralelos $u, v \in \mathbb{R}^n$. Considere os planos

$$\pi_1 = \{su + tv + w \,/\, s,t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

   e

$$\pi_2 = \{su + tv + \bar{w} \,/\, s,t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

   Se $w \neq \bar{w}$, então $\pi_1 \neq \pi_2$.