P3 - Álgebra Linear II
28/11/2007
Gabarito

1ª questão

Lembram do Fulano da Silva? Pois é, o coitado se meteu em outro labirinto! Neste ele pode ir da sala azul para as salas branca, rosa ou vermelha. Da sala rosa ele pode ir para a vermelha e para a branca. Da vermelha ele também pode ir para a branca. Ele sempre pode utilizar o caminho contrário. Ele não tem preferência por ir para nenhuma das salas e sempre é obrigado a mudar da sala que está toda vez que toca uma campainha. Considere para efeito de contas que o Sr. Fulano vai de uma sala a outra adjacente em 1 passo (Sr. Fulano tem passo de gigante, como vocês já sabem!).

a. Desenhe o grafo que representa o labirinto e escreva sua matriz de adjacência, M.
b. Quais são os autovalores de M e suas multiplicidades algébricas.
c. Determine uma fórmula, não recursiva e que dependa somente de n, para calcular o número de caminhos, de n passos (isto é após n toques de campainha) em que Fulano da Silva começa na sala azul e para ela retorna no passo n.
d. Determine uma fórmula, não recursiva e que dependa somente de n, para calcular o número de caminhos, de n passos (isto é após n toques de campainha) em que fulano da silva sai da sala azul e termina na sala vermelha.

a. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. Olhando para $\mathcal{M}$ podemos escrevê-la como : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - I$

logo os autovalores de $\mathcal{M}$ são: -1,-1,-1,3 (Os da matriz de 1's são: 0,0,0,4)

Usando cálculo funcional: como a matriz é diagonalizável só usaremos os autovalores diferentes, sem dar bola para as multiplicidades, logo um polinômio de grau 1 está de bom tamanho!

Então $a\lambda + b = \lambda^n$

$$a(3) + b = 3^n$$
$$a(-1) + b = (-1)^n$$

$$a = \frac{(3)^n - (-1)^n}{4} \qquad b = (3)^n - 3\,\frac{(3)^n - (-1)^n}{4} = \frac{(3)^n + 3(-1)^n}{4}$$

Fazendo $f(A) = M^n = P(A) = a * A + bI \quad P(A) = a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + bI = \begin{bmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{bmatrix}$

Logo queremos caminhos de azul para azul, os caminhos fechados: $\mathcal{F}(n) = \mathcal{M}^n[1,1] = b = \dfrac{(3)^n + 3(-1)^n}{4}$ e caminhos de azul para vermelho, caminhos abertos: $\mathcal{A}(n) = \mathcal{M}^n[1,2] = a = \dfrac{(3)^n - (-1)^n}{4}$

2ª questão

Seja a matriz: $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a. Encontre uma matriz P, ortogonal, tal que **P^tBP** seja a matriz $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. Quais são os autovalores e autovetores da matriz B^5-4B^3+I? Justifique.

a. Os autovalores já estão dados de lambuja, mas se você não acredita faça $B^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Deste jeito fica fácil ver que os autovalores de B^2 são 0,0,0,4,4 e portanto os de B são 0,0,0,2,-2, como dado! Agora precisamos calcular os autovetores de B.

Para $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$ escalonando temos $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$ portanto o autovetor associado à $\lambda=2$ é $v_1=t(2,1,1,1,1)$ para $t\,t\in\Re^*$, como quero uma matriz P que seja ortogonal (inversa igual a transposta) precisamos dele normalizado $u_1=\frac{1}{\sqrt{8}}(2,1,1,1,1)$

Para $\lambda=-2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$ escalonando temos $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$ portanto a autovetor associado à $\lambda=-2$ e $v_2=t(-2,1,1,1,1)$ para $t\in\Re^*$ normalizando $u_2=\frac{1}{\sqrt{8}}(-2,1,1,1,1)$

Para $\lambda=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ temos que atender a duas equações : $$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{matrix}$$ bom agora ou você fica quebrando a cabeça para escolher 3 vetores ortogonais que atendam às equações ou escolhe qualquer um que atenda as equações e usa Gram-Schmidt, eu vou escolher $v_3=(0,-1,1,0,0)$, $v_4=(0,-1,0,1,0)$ e $v_5=(0,-1,0,0,1)$. Perceba que estes já "nasceram" ortogonais a v_1 e v_2 (B é uma matriz simétrica!). Agora o bom e velho GS:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0,0)$$

$$\widetilde{u_4} = (0,-1,0,1,0) - \left\langle (0,-1,0,1,0), \frac{(0,-1,1,0,0)}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0,0) = \frac{1}{2}((0,-2,0,2,0) - (0,-1,1,0,0))$$

$$\widetilde{u_4} = \frac{1}{2}(0,-1,-1,2,0)$$

logo $u_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,-1,2,0)$

$$\widetilde{u_5} = (0,-1,0,0,1) - \left\langle (0,-1,0,0,1), \frac{(0,-1,1,0,0)}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{(0,-1,1,0,0)}{\sqrt{2}} - \left\langle (0,-1,0,0,1), \frac{(0,-1,-1,2,0)}{\sqrt{6}} \right\rangle \frac{(0,-1,-1,2,0)}{\sqrt{6}}$$ log

$$\widetilde{u_5} = \frac{1}{6}\left[(0,-6,0,0,6) - (0,-3,3,0,0,0) - (0,-1,-1,2,0)\right] = \frac{1}{6}(0,-2,-2,-2,6) = \frac{1}{3}(0,-1,-1,-1,3)$$

o $u = \frac{1}{\sqrt{12}}(0,-1,-1,-1,3)$ agora já temos as colunas da matriz P, falta só ver a ordem, (olhar pela posição em D.

$P^tBP=D$, logo $B=PDP^t$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{8}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{8}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{3}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

c. primeiro vamos descobrir quem é $B^5 - 4B^3 + I$, Usando cálculo funcional: como a matriz é diagonalizável só usaremos os autovalores diferentes, sem dar bola para as multiplicidades, logo um polinômio de grau 2 já dá! Usaremos então: $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = f(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 1$

para $\lambda = 0$ temos $c = 1$

para $\lambda = 2$ temos $4a + 2b = 2^5 - 4.2^3 = 0$

para $\lambda = -2$ temos $4a - 2b = (-2)^5 - 4.(-2)^3 = 0$ logo a=b=0

temos então que $B^5 - 4B^3 + I = I$ e portanto seus autovalores são 1 (multiplicidade 5) e seu autovetores são, por exemplo, a base canônica para $\mathbb{R}^5$.