P3 de Álgebra Linear II
25/06/09
Gabarito

1ª questão.

Uma determinada população de coelhos foi dividida por sexo e faixa etária: de 0 a 2 anos, de 2 a 4 anos e de mais de 4 anos. Suponha os fatos abaixo:

- O percentual de machos na faixa etária i que morre após um ano é β_i e o percentual de fêmea na faixa etária i que morre após dois anos é ρ_i.
- As fêmeas da faixa etária i geram um percentual α_i, da faixa etária i, de filhotes, e o número de filhotes de cada sexo é igual.

Denote o vetor da população no tempo t por $p(t) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t), f_1(t), f_2(t) f_3(t))^T$

Onde $m_i(t)$ e $f_i(t)$ são respectivamente as populações de machos e fêmeas da faixa etária i no tempo t

a. Determine a equação matricial relacionando os vetores $p(t+2)$ e $p(t)$

$$\begin{pmatrix} m_1(t+2) \\ m_2(t+2) \\ m_3(t+2) \\ f_1(t+2) \\ f_2(t+2) \\ f_3(t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1/2 & \alpha_2/2 & \alpha_3/2 \\ (1-\beta_1)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta_2)^2 & (1-\beta_3)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1/2 & \alpha_2/2 & \alpha_3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\rho_2 & 1-\rho_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

b. Considerando que no instante inicial existiam 100 machos e 100 fêmeas na segunda faixa etária, calcule a população de machos e fêmeas em cada faixa etária após 4 anos. Use que $\alpha=(0.5;0.6;0.2)$, $\beta=(0.2;0.2;0.4)$ e $\rho=(0.2;0.4;0.4)$.

$$\begin{pmatrix} m_1(4) \\ m_2(4) \\ m_3(4) \\ f_1(4) \\ f_2(4) \\ f_3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.3 & 0.1 \\ 0.64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.64 & 0.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1(4) \\ m_2(4) \\ m_3(4) \\ f_1(4) \\ f_2(4) \\ f_3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.3 & 0.1 \\ 0.64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.64 & 0.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 64 \\ 30 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.5 \\ 19.20 \\ 23.04 \\ 13.50 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}$$

2ª questão

Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justifique! Você pode usar um contra-exemplo.

a. Se A é diagonalizável, então A é inversível.

Falso, basta ter uma autovalor zero, que não será inversível, por exemplo, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *é diagonalizável, mas não é inversível*

b. Se A é inversível, então A é diagonalizável.

Falso, basta ter uma não gerar uma base de autovetores, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *é inversível, mas não é diagonalizável*

c. Seja B a matriz de uma transformação linear T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sabendo-se que B tem autovalores $\lambda_1 = 0$, associado a v=(1,1,1), $\lambda_2 = 1$ associado a {(1,0,-1),(1,-1,0)}, a imagem de T é o plano x+y+z=0

Verdadeiro . Se temos uma base b={(1,1,1),(1,0,-1),(1,-1,0)}, podemos escrever qualquer vetor w como w=a(1,1,1)+b(1,0,-1)+c(1,-1,0) e portanto T(w)=aT(1,1,1)+bT(1,0,-1)+cT(1,-1,0), mas as transformadas da base são conhecidas logo T(w)= b(1,0,-1)+c(1,-1,0), logo todas as imagens são combinações lineares destes dois vetores e portanto a imagem será o plano gerado por eles que é o plano dado x+y+z=0.

3ª Questão

Considere um grafo em forma de hexágono, conforme a figura.

a. Escreva a matriz de adjacência do grafo

Nomeando cada vértice como dito em sala: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. Seja F(n) o número de caminhos de comprimento n começando e terminando no vértice A. Escreva uma fórmula que dependa só de n para F(n)

Precisamos dos autovalores de M, olhando para a matriz já sabemos que 2 é um autovalor, mas os outros.....
Olhando para M^2

$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, logo temos uma matriz da forma* $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *e precisamos saber só os autovalores de B. Do mesmo modo que já sabíamos o 2, na matriz M (soma das linhas sempre igual), já sabemos que 4 é um* *autovalor de $\mathcal{B}$, podemos usar o traço=6 e o det=4, para achar os outros, que são 1 com multiplicidade 2, ou perceber que*

$$B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ *e como para achar os autovalores de $\mathcal{B}$ precisamos* $\det(B-\lambda I)=0$,

podemos escrever $\det(C+I-\lambda I)=0$ *ou ainda* $\det(C-(\lambda-1)I)=0$, *mas os autovalores de $\mathcal{C}$ são 3,0,0 então os de $\mathcal{B}$ são 4,1,1. Agora sabemos que os autovalores de $\mathcal{M}^2$ são 4 (com multiplicidade 2) e 1 (com multiplicidade 4).*
Temos então para $\mathcal{M}$: 2,-2, 1 (com multiplicidade 2) e -1 (com multiplicidade 2).
Pense: porque não pode ser 2,2,-1 (com multiplicidade 4)?
Como queremos $f(n)$, sabemos que este valor aparece em todos os elementos da diagonal principal de $\mathcal{M}^n$, logo usando a propriedade que realaciona os autovalores com o traço temos: $6F(n)=(2)^n+(-2)^n+2(1)^n+2(-2)^n$ *e,*

portanto, $F(n)=\dfrac{(2)^n+(-2)^n+2(1)^n+2(-2)^n}{6}$, *para quem foi na marra usando o polinômio interpolador encontrou:*

$$\left(\frac{(-1)^n}{6}-\frac{1}{6}-\frac{(-2)^n}{12}+\frac{2^n}{12}\right)\lambda^3+\left(\frac{2^n}{6}-\frac{1}{6}+\frac{(-2)^n}{6}-\frac{(-1)^n}{6}\right)\lambda^2$$
$$+\left(-\frac{2^n}{12}+\frac{2}{3}+\frac{(-2)^n}{12}-\frac{2(-1)^n}{3}\right)\lambda-\frac{2^n}{6}+\frac{2(-1)^n}{3}+\frac{2}{3}-\frac{(-2)^n}{6}$$

A forma geral da $\mathcal{M}^n$ é:

$$aM^3+bM^2+cM+d=$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0&3a&2a&3a\\0&0&0&3a&3a&2a\\0&0&0&2a&3a&3a\\3a&3a&2a&0&0&0\\2a&3a&3a&0&0&0\\3a&2a&3a&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b&b&b&0&0&0\\b&2b&b&0&0&0\\b&b&2b&0&0&0\\0&0&0&2b&b&b\\0&0&0&b&2b&b\\0&0&0&b&b&2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&c&0&c\\0&0&0&c&c&0\\0&0&0&0&c&c\\c&c&0&0&0&0\\0&c&c&0&0&0\\c&0&c&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d&0&0&0&0&0\\0&d&0&0&0&0\\0&0&d&0&0&0\\0&0&0&d&0&0\\0&0&0&0&d&0\\0&0&0&0&0&d\end{pmatrix}$$

Logo queremos F(n)=2b+d.

c. Calcule F(15)

$$F(15)=\frac{(2)^{15}+(-2)^{15}+2(1)^{15}+2(-2)^{15}}{6}=0$$