P3 de Álgebra Linear II
24/06/08
Gabarito

1ª questão.

a. Determine a equação matricial relacionando os vetores $p(t+3)$ e $p(t)$, onde t é medido em meses.

$$\begin{pmatrix} m_1(t+3) \\ m_2(t+3) \\ m_3(t+3) \\ f_1(t+3) \\ f_2(t+3) \\ f_3(t+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} \text{ ou seja,}$$

$$p(t+3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} p(t)$$

b. Em t=0, a população consistia de 100 mafagafos igualmente distribuídos por gênero, na faixa etária de 3 a 6 meses. Calcule p(6).

$$p(3) = \begin{pmatrix} m_1(3) \\ m_2(3) \\ m_3(3) \\ f_1(3) \\ f_2(3) \\ f_3(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 0 \\ 30 \\ 12.5 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$p(6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.25 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.5 \\ 0 \\ 30 \\ 12.5 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.375 \\ 7.5 \\ 24 \\ 4.375 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

2ª questão

Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justifique. Considere A uma matriz nxn.

a. Se a dimensão da imagem de A é menor do que n, isto significa que não existe nenhum autovalor igual a zero.

Falso. Se a dimensão da imagem de A é menor que n, então a dimensão do espaço nulo é pelo menos um, indicando que existe pelo menos um vetor v, não nulo,, tal que Av=0, logo este vetor v é um autovetor associado ao autovalor zero

b. Se a multiplicidade algébrica de somente um dos autovalores de A for igual a 2 e a de todos os outros for 1, a matriz é diagonalizável.

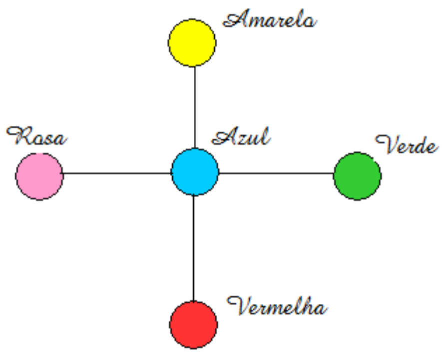
Falso. A matriz só será diagonizável se existir um base de n autovetores, para isto a multiplicidade geométrica do autovalor de multiplicidade algébrica igual a 2 também precisa ser 2, somente assim teremos n autovetores.

c. Se a matriz A é diagonalizável então todos os autovalores são distintos.

Uma matriz que possui autovalores distintos é diagonalizável já que cada um deles está associado a um autovetor, formando assim uma base de autovetores (condição para a diagonalização). No entanto em caso de autovetores com multiplicidade algébrica k, basta que a multiplicidade geométrica também seja k, para que ela seja diagonalizável

3ª Questão

Seja G, o grafo representado pela figura abaixo:



a. Dê a matriz de adjacência M do grafo acima.

Uma matriz de adjacência possível é: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. Quantas entradas diferentes a matriz M^n possui.

Existem 3 tipos de entradas:

- A-A, B-B, C-C, D-D: caminho fechado de n passos, F(n);
- A-E, B-E, C-E, D-E: caminho aberto de n passos, A(n)
- E-E: caminho fechado de E-E, $F_1(n)$

obs: os caminhos abertos de A-B/C/D, B-A/C/D, C-A/B/D, D-A/B/C são iguais ao caminho fechado de A-A, a partir de n=1.

c. Determine uma fórmula, não recursiva e que dependa somente de n, para calcular o número de caminhos, de n passos (isto é após n toques de campainha) em que Fulano da Silva começa na sala azul e para ela retorna no passo n.

d. Determine uma fórmula, não recursiva e que dependa somente de n, para calcular o número de caminhos, de n passos (isto é após n toques de campainha) em que fulano da silva sai da sala azul e termina na sala vermelha.

Para os dois itens acima acharemos a forma para a matriz M^n.

Para o cálculo dos autovalores é mais fácil usar $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, logo os autovalores de M^2 são 4,4,0,0,0. Portanto os de M são 0,0,0, 2 e -2. Como a matriz é simétrica não nos preocuparemos com as multiplicidades do autovalor zero e portanto temos, usando cálculo funcional:

$p(0) = a0^2 + b0 + c = 0^n = f(0)$;

$p(2) = a(2)^2 + b(2) + c = 2^n = f(2)$ e

$p(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c = (-2)^n = f(-2)$

resolvendo o sistema: $\begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b = 2^n \\ 4a - 2b = (-2)^2 \end{cases}$ encontramos que $a = \dfrac{(2)^n + (-2)^n}{8}$ e $b = \dfrac{(2)^n - (-2)^n}{4}$

$$p(M) = aM^2 + bM = \begin{pmatrix} a & a & a & a & 0 \\ a & a & a & a & 0 \\ a & a & a & a & 0 \\ a & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & b \\ b & b & b & b & 4a \end{pmatrix}$$

Logo para ir da sala azul para a sala azul temos que p números de caminho de n passos são $\dfrac{(2)^n + (-2)^n}{2}$ e para ir da sala vermelha é $\dfrac{(2)^n - (-2)^n}{4}$