P2 de Álgebra Linear II
22/10/09
Respostas

1ª Questão - **Justifique todas as suas respostas!**

Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Encontre uma fatoração *QR* para A. Lembre que uma fatoração *QR* da matriz A é um par de matrizes *Q* e *R* tais que *Q* é ortogonal, *R* é triangular superior e *A = QR*.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = QR$$

b. Verifique que A=QR, isto é, efetue a multiplicação de forma explicita, mostrando TODAS as operações feitas.

Esta eu passo!

2ª Questão - **Justifique todas as suas respostas!**

Considere uma transformação linear T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ representada pela matriz abaixo.

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Calcule todos os vetores w ortogonais a imagem de T.

O espaço ortogonal à imagem de T é o núcleo da transposta. A imagem é gerada pelas colunas da matriz T, logo só de olhar já vemos que a terceira coluna é igual à primeira, logo a dimensão da imagem é dois. Calculando o núcleo da transposta de T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ escalonando a matriz}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ logo as equações do núcleo da transposta são: $x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0$ e $x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$,os vetores w são aqueles que atendem as duas equações, logo são vetores da forma (-2t+2s,t-2s,t,s).

b. Diga a dimensão do núcleo de T.

Do item anterior vemos que dimensão da imagem é dois, logo a dimensão do núcleo é : (dimensão do domínio)- posto que dá 3-2 =1.

c. Dê a(s) equação(ões) cartesiana(s) do espaço ortogonal ao núcleo de T.

O espaço linha é ortogonal ao espaço nulo de A, logo fazendo o produto vetorial de dois vetores linha $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,-2)$ logo o espaço linha tem equação cartesiana x-z=0 .

d. Seja W o espaço gerado pelo(s) vetor(es) w encontrado(s) no item a. Calcule o vetor u que pertence a W e está mais próximo ao vetor v=(-1,1,0,1).

(-2t+2s,t-2s,t,s)=t(-2,1,1,0)+s(2,-2,0,1), logo uma base para W é $\{(-2,1,1,0),(2,-2,0,1)\}$. Queremos a projeção de v em W.

$$\operatorname{Proj} = A(A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$