P2 de Álgebra Linear II
Data: 18 de outubro de 2007

Gabarito

1ª questão

Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Encontre uma fatoração QR para A. Uma fatoração QR de uma matriz A é um par de matrizes Q e R tais que Q é ortogonal, R é triangular superior com diagonal positiva e $A = QR$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2ª questão

Considere todos os vetores e subespaços em R^n. Classifique cada afirmação abaixo como verdadeira ou falsa. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas!

a. Se z é ortogonal a u_1 e u_2, e se W é o espaço gerado por $\{u_1, u_2\}$, então z tem que pertencer a W. Considere $z \neq 0$.
b. Para cada y e cada subespaço W, o vetor (y – **proj**$_W y$) é ortogonal a W, onde **proj**$_W y$ é a projeção ortogonal de y em W. Considere $y \neq 0$.
c. Se as colunas de uma matriz U (nxp) são ortonormais, então $UU^T y$ é a projeção ortogonal de y sobre o espaço das colunas de U.
d. Se y pertence a um subespaço W, então a projeção ortogonal de y sobre W é próprio y.

a. *Falso. Se z é ortogonal a u_1 e u_2 ele não pode ser escrito como combinação linear destes vetores e portanto não pertence ao espaço gerado por eles.*
b. *Verdadeiro. Se $y \notin W$, (y – proj$_W y$) é ortogonal a W. E se $y \in W$, (y – proj$_W y$) $= 0$, que por definição também é ortogonal a W.*
c. *Verdadeiro. A solução de mínimos quadrados para x é :* $U^T U x = U^T y$, *logo* $x^* = (U^T U)^{-1} U^T y$ *a projeção é* $Ux^* = U(U^T U)^{-1} U^T y$, *como U é ortogonal* $(U^T U) = I$ *e portanto a projeção é* $UU^T y$
d. *Verdadeiro.*

3ª Questão

Seja W o espaço gerado pelos vetores $\{(1,0,0,3),(1,2,0,1)\}$.

a. encontre as equações para W.
b. encontre uma base para $W^{\perp}$.
c. calcule a projeção ortogonal do vetor v= (1,1,1,1) em $W^{\perp}$

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ escalonando } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a.

W é o espaço descrito por $a(1,0,0,3)+b(0,1,0,-1)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, *logo as equações para W são:*

$3x_1 - x_2 - x_4 = 0$ *e* $x_3 = 0$

b. Uma base para $W^{\perp}$ *é* $\{(-3,1,0,1),(0,0,1,0)\}$

c. Para achar a projeção, construiremos uma matriz A ortogonal a partir da base para $W^{\perp}$ *temos*

então $A = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{11} & 0 \\ 1/\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{11} & 0 \end{pmatrix}$ *logo a projeção será:* $A\left(A^T A\right)^{-1} A^T y$, *temos então*

$$A(I)^{-1}A^T y = AA^T y \text{ resolvendo } \begin{pmatrix} -3/\sqrt{11} & 0 \\ 1/\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} & 0 & 1/\sqrt{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3/\sqrt{11} & 0 \\ 1/\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{11} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 \\ -1/11 \\ 1 \\ -1/11 \end{pmatrix}$$