P2 de Álgebra Linear II
15/05/08

Gabarito

1ª questão.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Fatoração QR

$$v1 := [0, 0, 0, 2] \quad v2 := [0, 0, 1, 2] \quad v3 := [2, 0, 1, 2] \quad v4 := [2, 1, 1, 2]$$

```
u1:= v1/norm(v1,2);r11:=innerprod(u1,v1);
```

$$u1 := [0, 0, 0, 1] \quad r11 := 2$$

Encontrando um vetor w_2 *, que é ortogonal a* u_1

```
> r12:=innerprod(v2,u1); w2:= v2 - r12*u1;
```

$$r12 := 2 \quad w2 := [0, 0, 1, 0]$$

Normalize o vetor w_2 *para obter o segundo vetor ortonormal* u_2

```
> u2:= w2/norm(w2,2);r22:=innerprod(u2,w2) ;
```

$$u2 := [0, 0, 1, 0] \quad r22 := 1$$

Calcule o terceiro vetor ortonormal

```
> r13:=innerprod(v3,u1); r23:=innerprod(v3,u2); w3:= v3 - r13*u1 - r23*u2
```

$$r13 := 2 \quad r23 := 1 \quad w3 := [2, 0, 0, 0]$$

```
> u3:= w3/norm(w3,2);r33:=innerprod(u3,w3);
```

$$u3 := [1, 0, 0, 0] \quad r33 := 2$$

Calcule o quarto vetor ortonormal

```
> r14:=innerprod(v4,u1);r24:=innerprod(v4,u2);r34:=innerprod(v4,u3);
w4:= v4 - r14*u1 - r24*u2 - r34*u3
```

$$r14 := 2 \quad r24 := 1 \quad r34 := 2$$

$$w4 := [0, 1, 0, 0]$$

```
> u4:=evalm(w4/norm(w4,2));
```

$$u4 := [0, 1, 0, 0]$$

$$Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que para transformar A em uma matriz triangular superior basta o uso de permutações.

2ª questão.
Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A fatoração precisa de permutação logo, logo teremos PA=LU

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Para resolver o sistema o sistema Ax=(1,2,0,1), precisamos fazer PAx=PB, logo vamos resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fazemos então $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ *e resolvemos primeiro* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

temos então que $y_1 = 1$, $y_2 = -2$, $y_3 = 0$ *e* $y_4 = 1$. *Finalmente, resolvendo*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *obtemos* $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$ *e* $x_4 = 1$.

Conferindo: $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3ª Questão

Seja W o espaço gerado pelos vetores $\{(1,1,0,1),(1,2,0,1)\}$.

a. Encontre as equações para W.
O espaço W é gerado pelos vetores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *Logo as equações de W são* $$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

b. Encontre uma base para $W^{\perp}$.

As equações de $W^{\perp}$ *são* $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ *logo uma base é* $\{(0,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$.

c. Calcule a projeção ortogonal do vetor v= (1,1,1,1) em $W^{\perp}$

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *como o vetor não pertence ao espaço coluna da matriz A (* $W^{\perp}$ *),*
usaremos a solução de mínimos quadrados que dará a projeção ortogonal de v em $W^{\perp}$.
Fazendo $A^T Ax = A^T v$ *, logo a projeção será:* $proj = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T v$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ *cuja inversa é* $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *logo:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$