P1 de Álgebra Linear II
03/04/08

Nome: Gabarito

1ª. Questão
Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas. Nos casos em que a afirmativa for falsa você pode usar um contra-exemplo.

a. As colunas de uma matriz A são linearmente independentes se a equação Ax = 0 tem a solução trivial.

Verdadeiro

b. As colunas de qualquer matriz A 4x5 são linearmente independentes.

Falso, as colunas formarão um conjunto com cinco vetores em $\mathbb{R}^4$, logo este conjunto é LD.

c. Se um conjunto em R^n for linearmente independente, então o conjunto contem mais vetores do que o número de componentes de cada vetor.

Falso, a dimensão de um subespaço é dada pelo número de vetores de uma base para este subespaço, logo em $\mathbb{R}^n$, teremos, no máximo, n vetores LI.

d. Se os vetores não nulos u, v e w são L.D., então w é uma combinação linear de u e v?

Falso, considere u e v paralelos e w não paralelo a u.

2ª. Questão
Suponha que a matriz A tenha forma escalonada reduzida de linha R:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & a & 1 & 8 \\ & linha\,3 & & \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Quais são os números a e b?

Escalonando a matriz A encontramos: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & a-4 & -1 & 8-2b \\ & linha\,3 & & \end{pmatrix}$, comparando com R vemos que

$a-4=0$ logo $a=4$, ficamos então com $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & 8-2b \\ & linha\,3 & & \end{pmatrix}$, continuando o escalonamento

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8-b \\ 0 & 0 & -1 & 8-2b \\ & linha\,3 & & \end{pmatrix}$, logo $8-b=3$ então $b=5$.

b) Encontre as equações e uma base para o espaço nulo de R.

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$, logo uma base $\{(-2,1,0,0),(-3,0,-2,1)\}$

c) Seja o vetor v=(1,1,2,-1), você pode dizer quanto é Av?

Note que o vetor v pertence ao espaço nulo de A, logo $Av = 0$

d) A linha três poderia ser (4, 8, 1, 14)?

Sim, pois $(4,8,1,14) = 4(1,2,0,3) + (0,0,1,2)$

e) Caso sua resposta ao item anterior tenha sido afirmativa, dê uma base e as equações para o espaço coluna de A, caso contrário diga apenas a sua dimensão.

Escolhendo os vetores $\{(1,2,4),(1,1,1)\}$ como base para o espaço coluna, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$, logo a equação é: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

3ª. Questão

Considere os seguintes subespaços de $\Re^4$

V: gerado pelo conjunto de vetores {(1, 2, 1, 0); (1, 1, 2, -2); (3, 8, 1,4)} e

W: gerado pelo conjunto de vetores {(2, 1, 5, -6); (1, 2, 1, 0); (1, 1, 2, 2)}:

a. Diga a dimensão de cada subespaço.

Escalonando a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e escalonando $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ logo a $\dim(V)=2$ e $\dim(W)=3$

b. Encontre uma base para o subespaço $V \cap W$.

As equações de V são: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ a de W é $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$, logo os vetores que pertencem ao subespaço V também pertencem ao subespaço W, portanto uma base para a interseção é $\{(1,0,3,-4),(0,1,-1,2)\}$