P1 de Álgebra Linear II
02/04/09

-----------------*Gabarito*-------------------

1ª. Questão

Considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Diga se existe uma fatoração LU (isto é, se existem matrizes L e U, tal que L é triangular inferior com diagonal principal com entradas todas 1 e U triangular superior, com A = LU). Se existir, encontre-a. Se não existir, demonstre este fato e encontre uma matriz de permutação P tal que PA admita uma fatoração LU e encontre estas matrizes L e U.
b. Resolva usando a decomposição LU obtida no item a, o sistema Ax=(1,7,0,2)
c. Calcule o determinante de A.

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = LU$$

Para resolver o sistema o sistema Ax=(1,7,0,2), precisamos fazer PAx=Pb, logo vamos resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$, resolvemos primeiro

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$ temos então que $y_1 = 1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -1$ e $y_4 = 9$. Finalmente,

resolvendo $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$, obtemos $x_1 = -8$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$ e $x_4 = -1$.

Conferindo: $$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$. O det(A)=Det(P^{-1}).det(L).det(U)=-1x1x18=-18

2ª. Questão

Considere a matriz

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Determine uma base para o espaço nulo de T
b. Determine a(s) equação(ões) para o espaço linha de T
c. Determine uma base para a imagem de T.
d. O sistema $Tx = (1,-1,1,\sqrt{2})$ tem solução? Caso sua resposta seja afirmativa, calcule-a.
e. Se você formar um conjunto S com os vetores que encontrou no item c, quantos vetores no máximo, você pode adicionar a S de modo que este conjunto ainda seja LI. Exemplifique.

Escalonando T obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, portanto uma base para o espaço nulo é $S_{nulo}=\{(-1,-1,1)\}$, uma base para o espaço linha é $S_{linha}=\{(1,0,1),(0,1,1)\}$, logo a equação para o espaço linha é $x_1+x_2-x_3=0$. Uma base para a imagem é $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,\sqrt{2}/2)\}$, logo achando as equações para a imagem temos: $x_1 + x_2 = 0$ e $\sqrt{2}x_3 - 2x_4 = 0$. Como o vetor $(1,-1,1,\sqrt{2})$ não atende as equaçõe da imagem, ele não pertence a imagem e portanto o sistema não tem solução. Como imagem é um subespaço de dimensão 2 em R^4, podemos adicionar no máximo mais 2 vetores de modo que o conjunto continue LI.