PROVA 4 – ÁLGEBRA LINEAR II – 2012.2
TURMAS 3ZA E 3ZC – 06 DE DEZEMBRO DE 2012

Nome: ____ **Turma:** _______

Assinatura: ____________________________________ **Matrícula:** ___________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	0,5		
1b	1,0		
2a	1,0		
2b	0,5		
2c	0,5		
2d	1,0		
3a	0,5		
3b	0,5		
3c	0,5		
3d	0,5		
4a	0,5		
4b	1,0		
5a	0,5		
5b	0,5		
5c	0,5		
5d	0,5		
Nota final	10,0		

Instruções

- **Todas as respostas devem ser justificadas com clareza.**
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.

Pedido de Revisão

Questão 1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine se A é diagonalizável.
(b) Encontre uma matriz B tal que $e^B = A$.

Questão 2. Seja $V = \langle (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1), (1,1,0,0) \rangle$ um subespaço do $\mathbf{R}^4$.

(a) Apresente uma base ortonormal α para V.
(b) Seja $v = (5, 2, -3, -3) \in V$. Determine as coordenadas de v na base α.
(c) Seja $b = (1, 1, 0, 4)$. Encontre o vetor p de V mais próximo de w.
(d) Apresente a matriz da projeção ortogonal sobre o espaço V (na base canônica de $\mathbf{R}^4$).

Questão 3. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & a & b \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a e b de modo que B tenha posto 2. Utilize esses valores nos itens a seguir.
(b) Encontre uma base para o espaço-nulo de B.
(c) Encontre uma base para o espaço-coluna de B.
(d) Encontre uma base para o espaço-nulo da transposta de B.

Questão 4. Seja $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$T(x, y, z) = \big(2x + 2y - 2z\,,\, 3x + y + z\,,\, -x + y + z\big).$$

(a) Seja A a matriz que representa T na base canônica de $\mathbf{R}^3$. Obtenha uma fatoração $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e U é triangular superior.
(b) Encontre a matriz B que representa T na base ordenada $\big((1,1,0)\,,\,(1,0,1)\,,\,(0,1,1)\big)$.

Questão 5. Seja A uma matriz quadrada de entradas reais. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta ou apresente um contra-exemplo.

(a) Sejam $u, v \in \mathbf{R}^7$ dois vetores ortonormais. Então $\|u + v\| = \sqrt{7}$.
(b) Se A e B têm mesmo polinômio característico e A é diagonalizável então B é diagonalizável.
(c) Se A é ortogonalmente diagonalizável então A é simétrica.
(d) Se A é uma matriz 2×2 ortogonal então pode ser escrita na forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$ (ou seja, A é uma rotação ao redor da origem).

Observações

(i) Uma matriz quadrada A é dita (*ortogonalmente*) *diagonalizável* se existe uma matriz invertível (ortonormal) P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

(ii) A inversa $B = (b_{ij})$ de uma matriz (quadrada e invertível) $A = (a_{ij})$ tem entradas dadas por

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

onde A_{ji} é a matriz obtida de A eliminando-se sua j-ésima linha e sua i-ésima coluna.