GABARITO P4 – ÁLGEBRA LINEAR II – 2012.2
TURMAS 3ZA E 3ZC – 06 DE DEZEMBRO DE 2012

Questão 1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine se A é diagonalizável.

Solução: Como A é triangular, seus autovalores são suas entradas diagonais, 1 e 2. Claramente, e_3 e e_4 são autovetores associados a $\mu = 2$ e e_1 é um autovetor associado a $\lambda = 1$. Um cálculo direto mostra que não existe um autovetor independente de e_1 associado a λ. Portanto $m_\mu = d_\mu = 2$ mas $m_\lambda = 2 \neq 1 = d_\lambda$, donde tiramos que A não é diagonalizável. □

(b) Encontre uma matriz B tal que $e^B = A$.

Solução: Como A tem a forma

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \text{ onde } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

para encontrar $B = \log A$ basta encontrar $\log C$ e $\log D$, pois então

$$\log A = \begin{bmatrix} \log C & 0 \\ 0 & \log D \end{bmatrix}.$$

Como $D = \operatorname{diag}(2,2)$, $\log D = \operatorname{diag}(\log 2, \log 2)$. Para encontrar $\log C$ usamos cálculo funcional; devemos primeiro encontrar um polinômio $p(x) = ax + b$ tal que

$$\begin{cases} p(1) = \log 1 = 0 \\ p'(1) = 1 = \log'(1). \end{cases}$$

Deduzimos imediatamente que $a = 1$ e $b = -1$, portanto $\log C = C - I$. Segue daí que

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \log 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \log 2 \end{bmatrix}.$$

Também é possível encontrar B sem usar a decomposição de A em blocos, ainda usando cálculo funcional. Para isto tomamos $B = q(A)$, onde $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ e

$$\begin{cases} q(1) = 0 = \log 1 \\ q'(1) = 1 = \log'(1) \\ q(2) = \log 2 \end{cases}$$

Aqui podemos usar um polinômio de grau (no máximo) 2 porque a multiplicidade geométrica de $\mu = 2$ coincide com sua multiplicidade algébrica. □

Questão 2. Seja $V = \langle (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1), (1,1,0,0) \rangle$ um subespaço do $\mathbf{R}^4$.

(a) Apresente uma base ortonormal α para V.

Solução: Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 os vetores do enunciado, nesta ordem. Primeiro observe que $v_4 = v_3 - v_1$. Logo $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Além disto, os vetores linearmente independentes

$$e_1 = (1,0,0,0) = v_3 - v_2, \quad e_2 = (0,1,0,0) = v_2 - v_1 \quad e \quad v_1 = (0,0,1,1)$$

pertencem a V. Portanto

$$V = \langle e_1, e_2, v_1 \rangle, \text{ onde } v_1 = (0,0,1,1).$$

Concluímos que $\alpha = \left\{ e_1, e_2, \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \right\}$ é uma base ortonormal para W. ☐

(b) Seja $v = (5, 2, -3, -3) \in V$. Determine as coordenadas de v na base α.

Solução: Devemos determinar $a, b, c \in \mathbf{R}$ tais que $ae_1 + be_2 + c\frac{1}{\sqrt{2}}v_1 = v$. Claramente,

$$a = 5, \quad b = 2 \quad e \quad c = -3\sqrt{2}.$$ ☐

(c) Seja $b = (1, 1, 0, 4)$. Encontre o vetor p de V mais próximo de b.

Solução: Sabemos que p é a projeção ortogonal de b em V:

$$p = \langle b, e_1 \rangle e_1 + \langle b, e_2 \rangle e_2 + \frac{1}{2} \langle b, v_1 \rangle v_1 = e_1 + e_2 + 2v_1 = \big(1\,,\,1\,,\,2\,,\,2\big).$$ ☐

(d) Apresente a matriz da projeção ortogonal sobre o espaço V (na base canônica de $\mathbf{R}^4$).

Solução: Seja $P\colon \mathbf{R}^4 \to V$ a projeção ortogonal em V. Então a matriz $[P]$ que representa P na base canônica é

$$[P] = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ P(e_1) & P(e_2) & P(e_3) & P(e_4) \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$ ☐

Questão 3. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & a & b \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a e b de modo que B tenha posto 2. Utilize esses valores nos itens a seguir.

Solução: Começamos por escalonar B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3'=L_3-L_1]{L_2'=L_2-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 & b-5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3'=L_3+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 & b-8 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz escalonada U tem posto 2 se e somente se sua última linha é nula, ou seja, se e somente se $a = 4$ e $b = 8$. ☐

(b) Encontre uma base para o espaço-nulo de B.

Solução: O espaço-nulo de B é o mesmo que o espaço-nulo de U. Para achar uma base para este último, começamos por escrever as variáveis básicas x_1, x_2 em termos das variáveis livres x_3, x_4 e x_5 a partir do sistema $Ux = 0$ (onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$), obtendo que:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

Sendo assim, uma base para o espaço-nulo de B é formada pelos três vetores

$$(-2, 1, 1, 0, 0)\,, (2, -2, 0, 1, 0)\,, (1, -3, 0, 0, 1),$$

que foram obtidos fazendo-se alternadamente uma das variáveis livres igual a 1 e as outras iguais a 0. ☐

(c) Encontre uma base para o espaço-coluna de B.

Solução: Uma base para o espaço-coluna de B é formada pelas colunas de B que contêm os pivôs de U, no caso, as colunas 1 e 2. Explicitamente, uma base é formada por

$$u = (1, 1, 1) \text{ e } v = (2, 1, 3). \qquad \square$$

(d) Encontre uma base para o espaço-nulo da transposta de B.

Solução: O espaço-nulo da transposta é o complemento ortogonal (em $\mathbf{R}^3$) do espaço-coluna. Assim, uma base para ele é formada pelo único vetor

$$u \times v = (2, -1, -1). \qquad \square$$

Questão 4. Seja $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$T(x, y, z) = \big(2x + 2y - 2z\,,\, 3x + y + z\,,\, -x + y + z\big).$$

(a) Seja A a matriz que representa T na base canônica de $\mathbf{R}^3$. Obtenha uma fatoração $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e U é triangular superior.

Solução: A matriz A é dada por

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escalonando A obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3'=L_3+\frac{1}{2}L_1]{L_2'=L_2-\frac{3}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3'=L_3+L_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz L tem entradas (i, j), para $i > j$, dadas pelos coeficientes l_{ij} das operações elementares $L_i' = L_i - l_{ij}L_j$ que fizemos. Assim,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

(b) Encontre a matriz B que representa T na base ordenada $\big((1, 1, 0)\,,\,(1, 0, 1)\,,\,(0, 1, 1)\big)$.

Solução: Primeiro devemos escrever as imagens de cada um dos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ por T nesta base. Temos:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= (4, 4, 0) = 4v_1, \\ T(v_2) &= (0, 4, 0) = 2v_1 - 2v_2 + 2v_3, \\ T(v_3) &= (0, 2, 2) = 2v_3, \end{aligned}$$

logo

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Questão 5. Seja A uma matriz quadrada de entradas reais. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta ou apresente um contra-exemplo.

(a) Sejam $u, v \in \mathbf{R}^7$ dois vetores ortonormais. Então $\|u + v\| = \sqrt{7}$.

(b) Se A e B têm mesmo polinômio característico e A é diagonalizável então B é diagonalizável.

(c) Se A é ortogonalmente diagonalizável então A é simétrica.

(d) Se A é uma matriz 2×2 ortogonal então pode ser escrita na forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$ (ou seja, A é uma rotação ao redor da origem).

Solução:

(a) Falsa. Basta tomar $u = e_1$ e $v = e_2$ (vetores da base canônica). Então $u + v = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ tem norma $\sqrt{2}$.

(b) Falsa. Tome

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então ambas têm polinômio característico $p(x) = x^2$, mas, equanto A é diagonal, B não diagonalizável, já que o autovalor 0 tem multiplicidade algébrica 2 e geométrica 1.

(c) Verdadeira. Se A é ortogonalmente diagonalizável então existem uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $A = QDQ^{-1} = QDQ^t$. Portanto

$$A^t = QD^tQ^t = QDQ^t = A. \qquad \square$$

(d) Falsa. Uma matriz 2×2 ortogonal pode ter a forma

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{para algum } \theta \in [0, 2\pi).$$

Qualquer matriz da forma R_θ tem determinante 1, e qualquer matriz da forma S_θ tem determinante -1. Geometricamente, R_θ corresponde a uma rotação por um ângulo θ ao redor da origem (no sentido anti-horário), enquanto S_θ representa uma reflexão na reta

$$y \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Observações

(i) Uma matriz quadrada A é dita (*ortogonalmente*) *diagonalizável* se existe uma matriz invertível (ortogonal) P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

(ii) A inversa $B = (b_{ij})$ de uma matriz (quadrada e invertível) $A = (a_{ij})$ tem entradas dadas por

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

onde A_{ji} é a matriz obtida de A eliminando-se sua j-ésima linha e sua i-ésima coluna.