GABARITO P3 – ÁLGEBRA LINEAR II – 2012.2
TURMAS 3ZA E 3ZC – 22 DE NOVEMBRO DE 2012

Questão 1. Seja $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x,y,z) = \big(2x\,,\,7x - z\,,\,4x - 2y + z\big).$$

(a) Encontre os autovalores λ de T e suas multiplicidades algébricas (m_λ) e geométricas (d_λ).

Solução: A matriz que representa T na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um cálculo simples mostra que seu polinômio característico p é dado por

$$p(x) = \det(xI - A) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Usando a observação ao final da prova concluímos que qualquer raiz racional de p deve ser inteira e dividir 4. Por inspeção vemos que $\lambda = 2$ é raiz, assim como $\mu = -1$. De fato, $p(x) = (x-2)^2(x+1)$. A resolução dos sistemas lineares $Au = \lambda u$ e $Av = \mu v$ resulta em

$$u = t\,(0,1,-2) \;\text{ e }\; v = t\,(0,1,1), \text{ onde } t \in \mathbf{R}.$$

Portanto $\lambda = 2$ é um autovalor com $m_\lambda = 2$ e $d_\lambda = 1$. Já $\mu = -1$ é um autovalor com $m_\mu = d_\mu = 1$. □

(b) Encontre a matriz B que representa T na base ordenada

$$\beta = \big(\,(0,1,-2)\,,\,(1,2,2)\,,\,(0,1,1)\,\big).$$

Solução: O primeiro e último vetores são autovetores de T, portanto para achar a matriz $[T]_\beta$ basta encontrar as coordenadas $a, b, c \in \mathbf{R}$ de $T(1,2,2)$ nesta base:

$$T(1,2,2) = (2,5,2) = a(0,1,-2) + b(1,2,2) + c(0,1,1).$$

Uma conta simples mostra que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 0$. Logo, a matriz de T na base β é dada por:

$$B = [T]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ □

(c) Encontre $\cos(\pi A)$, onde A é matriz que representa T na base canônica. (Sua resposta pode ser expressa como um polinômio em A, contanto que os coeficientes deste tenham sido encontrados).

Solução: Como T não é diagonalizável, devemos primeiro encontrar um polinômio $q(x) = ax^2 + bx + c$ de grau menor ou igual a 2 tal que:

$$\begin{cases} q(-1) = -1 & = \cos(-\pi) \\ q(2) = 1 & = \cos(2\pi) \\ q'(2) = 0 & = -\pi\sin(2\pi) \end{cases}$$

Uma conta simples mostra que

$$a = -\frac{2}{9},\; b = \frac{8}{9},\; c = \frac{1}{9}.$$

Portanto

$$\cos(\pi A) = aA^2 + bA + cI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 4 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Questão 2.

(a) Seja $p(x) = (x+1)(x-3)^2(x^2+2)$. Encontre uma matriz quadrada A com entradas reais que tenha p como polinômio característico.

Solução: O polinômio p tem raízes -1, 3 (de multiplicidade 2) e $\pm 2i$. Uma tal matriz seria:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

(b) Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\operatorname{tr}(B^{-1})$.

Solução: Como B é triangular, as raízes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 7$, $\lambda_4 = -6$ e $\lambda_5 = 2$ de seu polinômio característico são suas entradas diagonais. Como nenhuma delas vale 0, B é invertível. Além disto, λ é autovalor de B se e somente se λ^{-1} é autovalor de B^{-1}; de fato, se $Bv = \lambda v$ então $B^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda}v$ e reciprocamente. Segue que

$$\operatorname{tr}(B^{-1}) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i^{-1} = \frac{41}{42}. \qquad \square$$

Questão 3. Seja L a matriz de Leslie

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

e seja $X(k) = (X_1(k)\,,\, X_2(k)\,,\, X_3(k))$ o vetor que dá a distribuição etária da população modelada por L no instante t_k. Encontre

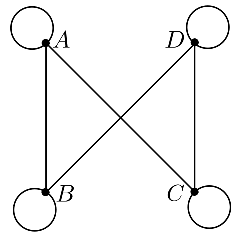
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{X_2(k)}{X_3(k)}.$$

Solução: A matriz A tem polinômio característico $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x+1)(x-3)$, portanto o autovalor positivo de L é $\Lambda = 3$. Os autovetores associados podem ser encontrados resolvendo-se o sistema $Lv = \Lambda v$, cuja solução é: $v = tV$, onde $V = (72, 12, 1)$. Então

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{X_2(k)}{X_3(k)} = \frac{V_2}{V_3} = 12. \qquad \square$$

Questão 4. Seja G o grafo com 4 vértices A, B, C, D desenhado abaixo.

(a) Encontre a matriz de adjacência M do grafo G e seus autovalores.



Solução: A matriz de adjacência M do grafo G é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = N + I.$$

A matriz N tem posto 1 e imagem gerada por $(2, 2, 2, 2)$. Logo possui apenas dois autovalores: $\lambda = 0$ e $\mu = 8$, com $d_\lambda = m_\lambda = \dim \mathcal{N}(A) = 3$ e $d_\mu = m_\mu = 1$. Daí segue que a matriz M^2 tem como autovalores 1 e 9, com multiplicidades (alg. e geom.) iguais a 3 e 1, respectivamente. Isto nos diz que os possíveis autovalores de M são ± 1 e ± 3, e apenas um dentre ± 3 pode ser autovalor. Como a soma das entradas em cada linha de M vale 3, 3 é autovalor de M. Como $\operatorname{tr} M = 4$, os outros autovalores de M devem ser -1 e 1, com respectivas multiplicidades algébricas 1 e 2. □

(b) Determine o número de caminhos de comprimento 7 em G ligando o vértice A a ele mesmo.

Solução: Sabendo que a matriz M é diagonalizável, com autovalores ± 1 e 3, para encontrar M^7 basta encontrar $q(M)$, onde $q(x) = ax^2 + bx + c$ é um polinômio tal que:

$$\begin{cases} q(1) = a + b + c = 1 \\ q(-1) = a - b + c = -1 \\ q(3) = 9a + 3b + c = 3^7. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações obtemos que $c = -a$ e $b = 1$, e então das duas últimas que

$$a = -c = \frac{3^7 - 3}{8} = \frac{3(3^6 - 1)}{8} = 3\frac{728}{8} = 3 \cdot 91 = 273.$$

O número de caminhos de comprimento 7 que ligam o vértice A ao vértice A é portanto a entrada $(1, 1)$ de $aM^2 + bM + cI$, que vale:

$$3 \cdot 273 + 1 - 273 = 2 \cdot 273 + 1 = 547.$$ □

Questão 5. Sejam $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ um operador linear, A a matriz que o representa na base canônica. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta ou apresente um contra-exemplo.

(a) Se A tem posto k então 0 é autovalor de T de multiplicidade geométrica $n - k$.
(b) Se A é 2×2 diagonalizável então $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$.
(c) Se A é ortogonal então A é diagonalizável.

Solução:

(a) Verdadeira. Se A tem posto k, então (pelo teorema do núcleo e da imagem)

$$\dim \mathcal{N}(A) = \dim \{v \in \mathbf{R}^n : Tv = 0\} = n - k$$

Mas este último é exatamente o subespaço característico associado ao autovalor $\lambda = 0$ de T. Logo, $d_0 = n - k$.

(b) Verdadeira. Se vale a hipótese de (b) então podemos escrever $A = PDP^{-1}$, onde P é uma matriz invertível, $D = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ e λ, μ são os autovalores de A. Usando que $A^k = PD^kP^{-1}$ obtemos que:

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} = Pe^DP^{-1} = P \operatorname{diag}(e^\lambda, e^\mu)P^{-1}.$$

Portanto $\det(e^A) = e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu} = e^{\operatorname{tr} A}$.

(c) Falsa. A rotação

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

por um ângulo $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) é ortogonal mas não diagonalizável, já que seus autovalores são complexos: $\cos\theta \pm i \sin\theta$. Em especial, a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é ortogonal mas tem autovalores $\pm i$, por isto não é diagonalizável. □

Observações

(i) Seja f um polinômio de coeficientes inteiros,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbf{Z} \text{ para todo } i = 0, \ldots, n.$$

Suponha que $r = p/q$ seja uma raiz racional de f, com p e q relativamente primos (i.e., sem divisores comuns). Então $q \mid a_n$ e $p \mid a_0$.

(ii) A inversa $B = (b_{ij})$ de uma matriz (quadrada e invertível) $A = (a_{ij})$ tem entradas dadas por

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

onde A_{ji} é a matriz obtida de A eliminando-se sua j-ésima linha e sua i-ésima coluna.

(iii) A série de Taylor da função exponencial ao redor de $t = 0$ é:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots.$$

(iv) Se λ é raiz do polinômio característico de A então λ^2 é raiz do polinômio característico de A^2.

(v) Algumas potências de 3:

$$3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243, \quad 3^6 = 729, \quad 3^7 = 2187, \quad 3^8 = 6561, \quad 3^9 = 19683, \quad 3^{10} = 59049.$$