GABARITO P2 – ÁLGEBRA LINEAR II – 2012.2
TURMAS 3ZA E 3ZC – 4 DE OUTUBRO DE 2012

Questão 1. Seja $r \subset \mathbf{R}^3$ a reta pela origem gerada por $(2, -2, 1)$.

(a) Encontre a matriz da projeção ortogonal em r na base canônica de $\mathbf{R}^3$.

Solução: Seja

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então a matriz da projeção ortogonal P em r na base canônica de $\mathbf{R}^3$ é dada por

$$[P] = \frac{uu^t}{u^t u} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(b) Encontre a distância do ponto $(11, -1, 3)$ à reta r.

Solução: A projeção p de b sobre r é dada por

$$p = Pb = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 54 \\ -54 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, a distância de b a r é dada por $\|b - p\| = \|(5, 5, 0)\| = 5\sqrt{2}$. □

Questão 2. Sejam $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-2, 3, -2)$, $v_3 = (1, 2, 1)$ e $S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbf{R}^3$.

(a) Encontre uma base ortonormal para S.

Solução: Usando o algoritmo de Gram-Schmidt obtemos os vetores

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle\, u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle\, u_1\|} = \frac{(-2, 3, -2) + \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)}{\|\cdot\|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(1, 2, 1)}{\|\cdot\|} = \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

(Aqui o símbolo $\|\cdot\|$ indica que estamos tomando a norma do vetor no numerador.) Se continuarmos a aplicação de Gram-Schmidt com o vetor v_3 obteremos que

$$v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle\, u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle\, u_2 = 0,$$

o que indica que v_3 é combinação linear de v_1 e v_2. De fato, $v_3 = 7v_1 + 3v_2$. Conseqüentemente $S = \langle v_1, v_2 \rangle$, e os vetores u_1 e u_2 obtidos acima formam uma base ortonormal para S. □

(b) Encontre a matriz que representa a projeção ortogonal em S na base canônica de $\mathbf{R}^3$.

Solução: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a matriz que tem v_1 e v_2 como vetores-coluna. Então a matriz da projeção ortogonal $P\colon \mathbf{R}^3 \to S$ na base canônica de $\mathbf{R}^3$ é dada por

$$[P] = A(A^tA)^{-1}A^t.$$

Contas rotineiras mostram que:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^tA = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 17 \end{bmatrix}, \quad (A^tA)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$[P] = A(A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(c) Seja $d\colon S \to \mathbf{R}$ dada por $d(v) = \|v - b\|$, onde $b = (1, 2, 3)$. Encontre o menor valor m atingido por d.

Solução: Este valor m é a distância de b a S, dada por $\|p - b\|$, onde $p = Pb$ é a projeção ortogonal de b em S. Como

$$p = Pb = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

concluímos que

$$m = \|p - b\| = \|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{2}.$$

□

(d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Encontre Q ortogonal e R triangular superior tais que $A = QR$.

Solução: A matriz Q é uma matriz 3×2 (mesmas dimensões de A) cujos vetores-coluna são u_1 e u_2 (encontrados em (a)) e a matriz R é uma matriz 2×2 dada por

$$R = \begin{bmatrix} \langle v_1, u_1 \rangle & \langle v_2, u_1 \rangle \\ 0 & \langle v_2, u_2 \rangle \end{bmatrix}.$$

Logo

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{-7}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

□

(e) Encontre uma base ortonormal para o complemento ortogonal do espaço-coluna de $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solução: A coluna da matriz B é o vetor v_1 do enunciado. No item (a) já encontramos um múltiplo u_1 de v_1 e um vetor u_2 tais que $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de S. Logo, uma base ortonormal para $\langle v_1 \rangle^\perp$ é dada por $\{u_2, u_3\}$, onde

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}. \qquad \square$$

Questão 3. O físico Nilton mediu a posição s de um bólido que se deslocava em uma canaleta em determinados instantes, encontrando que:

$$s(-1) = 2, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = -3, \quad s(2) = -5.$$

(a) Mostre que não existem $C, D \in \mathbf{R}$ tais que $s(t_i) = C + Dt_i$ para todo $i = 1, \ldots, 4$, onde $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ e $t_4 = 2$.

Solução: Substituindo $s(t_i)$ por $C + Dt_i$, deduzimos que C e D devem satisfazer simultaneamente as seguintes equações:

$$\begin{cases} C - D & = 2 \\ C & = 0 \\ C + D & = -3 \\ C + 2D & = -5 \end{cases}$$

As três primeiras equações são inconsistentes, portanto o sistema não tem solução. $\square$

(b) Encontre $\hat{s}$ da forma $\hat{s}(t) = c + dt$ de modo que $\sum_{i=1}^{4} [s(t_i) - \hat{s}(t_i)]^2$ assuma o menor valor possível.

Solução: Usamos o método dos mínimos quadrados. Devemos encontrar a solução do sistema $A\hat{x} = Pb$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e P é a projeção ortogonal no espaço-coluna de A, a saber, $P = A(A^tA)^{-1}A^t$. Desta última expressão e do fato que A é injetiva deduzimos que $\hat{x} = (A^tA)^{-1}A^tb$, portanto só é necessário calcular este último vetor. Contas simples mostram que:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^tA = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad (A^tA)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$(A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = (A^tA)^{-1}A^tb = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -3 \\ -24 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Questão 4. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta ou apresente um contra-exemplo.

(a) Seja $\langle \ , \ \rangle \colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3^2$, onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$. Então $\langle \ , \ \rangle$ define um produto interno em $\mathbf{R}^3$.

(b) Seja V um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Então, para quaisquer $u, v \in V$,

$$4 \langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

(c) Seja $P\colon \mathbf{R}^n \to S$ a projeção ortogonal em um subespaço $S \subset \mathbf{R}^n$. Então P preserva o ângulo entre vetores: $\sphericalangle(u,v) = \sphericalangle(Pu,Pv)$ para quaisquer $u,v \in \mathbf{R}^n$.

(d) Sejam $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uma transformação linear injetiva e A a matriz $m \times n$ que representa T nas bases canônicas de $\mathbf{R}^m$ e $\mathbf{R}^n$. Então $A(A^tA)^{-1}A^t = I$.

(e) Seja Q uma matriz $n \times n$ cujos vetores-linha são ortogonais. Então Q é ortogonal.

Solução: Exceto pelo item (b), todas as afirmações são falsas.

(a) Esta função não é linear em nenhum de seus argumentos, por exemplo

$$\langle\!\langle (0,0,1)\,,\,(0,0,1)+(0,0,1) \rangle\!\rangle = 1 \neq 2 = \langle\!\langle (0,0,1)\,,\,(0,0,1) \rangle\!\rangle + \langle\!\langle (0,0,1)\,,\,(0,0,1) \rangle\!\rangle,$$

nem é simétrica, por exemplo

$$\langle\!\langle (0,0,1),(0,0,0) \rangle\!\rangle = 1 \neq 0 = \langle (0,0,0),(0,0,1) \rangle\,.$$

Logo, não define um produto interno.

(b) Esta equação é demonstrada por meio de uma conta simples. Usando a linearidade em ambos os argumentos e a simetria de $\langle\ ,\ \rangle$ deduzimos que

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle - \langle u-v, u-v \rangle \\ &= \big(\langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle \big) - \big(\langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle - \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle \big) \\ &= 2\,\langle u,v \rangle + 2\,\langle v,u \rangle = 4\,\langle u,v \rangle\,.\end{aligned}$$

(c) Tome $u = (1,1)$, $v = (1,-1)$ e P a projeção ortogonal na reta $y = 0$ (eixo-x). Então u e v são ortogonais, mas Pu e Pv são iguais.

(d) Tome $T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(1) = (1,0)$. Então T é injetiva pois $\mathcal{N}(T) = \{0\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I.$$

(e) Tome $Q = 2I$, onde I é a identidade 2×2. Então os vetores-linha e vetores-coluna de Q são ortogonais, mas não ortonormais, portanto Q não pode ser ortogonal. De fato, $\det Q = 4$. $\square$