PROVA 2 – ÁLGEBRA LINEAR II – 2012.2
TURMAS 3ZA E 3ZC – 4 DE OUTUBRO DE 2012

Nome: ____ **Turma:** _______

Assinatura: __________________________________ **Matrícula:** ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	0,5		
1b	0,5		
2a	0,5		
2b	0,5		
2c	0,5		
2d	0,5		
2e	0,5		
3a	0,3		
3b	0,7		
4a	0,5		
4b	0,5		
4c	0,5		
4d	0,5		
4e	0,5		
Prova	7,0		
Teste	3,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- **Todas as respostas devem ser justificadas com clareza.**
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- Qualquer tentativa de cola será punida com a atribuição de 0,0 à sua nota final.

Questões

Questão 1. Seja $r \subset \mathbf{R}^3$ a reta pela origem gerada por $(2,-2,1)$.

(a) Encontre a matriz da projeção ortogonal em r na base canônica de $\mathbf{R}^3$.

(b) Encontre a distância do ponto $(11,-1,3)$ à reta r.

Questão 2. Sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (-2,3,-2)$, $v_3 = (1,2,1)$ e $S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbf{R}^3$.

(a) Encontre uma base ortonormal para S.

(b) Encontre a matriz que representa a projeção ortogonal em S na base canônica de $\mathbf{R}^3$.

(c) Seja $d\colon S \to \mathbf{R}$ dada por $d(v) = \|v - b\|$, onde $b = (1,2,3)$. Encontre o menor valor m atingido por d.

(d) Encontre R triangular superior e Q de vetores-coluna ortonormais tais que $A = QR$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(e) Encontre uma base ortonormal para o complemento ortogonal do espaço-coluna de $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Questão 3. O físico Nilton mediu a posição s de um bólido que se deslocava em uma canaleta em determinados instantes, encontrando que:

$$s(-1) = 2, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = -3, \quad s(2) = -5.$$

(a) Mostre que não existem $C, D \in \mathbf{R}$ tais que $s(t_i) = C + Dt_i$ para todo $i = 1, \dots, 4$, onde $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ e $t_4 = 2$.

(b) Encontre $\hat{s}$ da forma $\hat{s}(t) = c + dt$ de modo que $\sum_{i=1}^{4} [s(t_i) - \hat{s}(t_i)]^2$ assuma o menor valor possível.

Questão 4. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta ou apresente um contra-exemplo.

(a) Seja $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3^2$, onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$. Então $\langle\ ,\ \rangle$ define um produto interno em $\mathbf{R}^3$.

(b) Seja V um espaço vetorial munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Então, para quaisquer $u, v \in V$,

$$4\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

(c) Seja $P\colon \mathbf{R}^n \to S$ a projeção ortogonal em um subespaço $S \subset \mathbf{R}^n$. Então P preserva o ângulo entre vetores: $\sphericalangle(u, v) = \sphericalangle(Pu, Pv)$ para quaisquer $u, v \in \mathbf{R}^n$.

(d) Sejam $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uma transformação linear injetiva e A a matriz $m \times n$ que representa T nas bases canônicas de $\mathbf{R}^m$ e $\mathbf{R}^n$. Então $A(A^tA)^{-1}A^t = I$.

(e) Seja Q uma matriz $n \times n$ cujos vetores-linha são ortogonais. Então Q é ortogonal.

Observações

A inversa $B = (b_{ij})$ de uma matriz (quadrada e invertível) $A = (a_{ij})$ tem entradas dadas por

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

onde A_{ji} é a matriz obtida de A eliminando-se sua j-ésima linha e sua i-ésima coluna.

*

Uma transformação linear $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ é dita *injetiva* se satisfaz qualquer uma das seguintes condições:

(i) Se $Tx = Ty$ então $x = y$.
(ii) $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.
(iii) Os vetores-coluna da matriz A que representa T são linearmente independentes.
(iv) O posto de A vale n.

Rascunho

Rascunho