Gabarito da P1 de Álgebra Linear II – MAT 1202
Turmas: 3ZA e 3ZC – 2012.2 Data: 30 de Agosto de 2012

1. (a) **(0,5p)** Determine se o conjunto $\{(1,2,1),(1,1,3),(2,5,1)\}$ de vetores de $\mathbf{R}^3$ é linearmente independente.

   Solução: Para mostrar que estes vetores são L.I., podemos encontrar uma base para o espaço gerado por estes vetores. Tomamos a matriz A que tem estes vetores como vetores-linha e a escalanamos, obtendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3'=L_3-2L_1]{L_2'=L_2-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3'=L_3+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

   Como vimos em aula, o espaço-linha de A, i.e., o espaço gerado pelos vetores do enunciado, é o mesmo que o espaço-linha de U, e este último tem como base as linhas não-nulas de U. Em particular, ele tem dimensão 3, ou seja, os vetores em questão devem ser L.I.. $\square$

   Outra Solução: Basta verificar se a matriz A que tem estes vetores como vetores-linha (ou vetores-coluna) tem determinante nulo. Caso tenha, os vetores são L.D., e caso contrário, eles são L.I.. Uma conta simples mostra que o determinante desta matriz é -1. $\square$

   (b) **(1,0p)** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Encontre uma matriz triangular superior U e uma matriz triangular inferior L tais que $A = LU$.

   Solução: Procedemos como na primeira 1ª solução do item (a). A matriz L é uma matriz triangular inferior de entradas diagonais todas iguais a 1 e entradas (i,j), para $i > j$, dadas pelos coeficientes l_{ij} das operações elementares $L_i' = L_i - l_{ij}L_j$ que fizemos. No caso, fizemos as operações $L_2' = L_2 - L_1$, $L_3 = L_3 - 2L_1$ e $L_3' = L_3 + L_2$, logo $l_{21} = 1$, $l_{31} = 2$ e $l_{32} = -1$, assim

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   onde esta última foi encontrada acima. $\square$

2. A fatoração $PA = LU$ realizada sobre uma matriz A resultou nas seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) **(0,4p)** Calcule $\det(A)$.

Solução: Como P é obtida da identidade fazendo-se uma única troca de linhas ($L_2 \leftrightarrow L_3$), seu determinante deve ser igual a -1. (Em geral, se C é obtida de B fazendo-se n operações consecutivas de trocas de linhas, então $\det C = (-1)^n \det B$.) Já as matrizes L e U têm, como toda matriz triangular, seus determinantes dados pelos produtos de suas respectivas entradas diagonais. Portanto $\det L = 1$ e $\det U = -4$. Da igualdade $PA = LU$ tiramos portanto que

$$(-1)\det A = \det P \det A = \det L \det U = 1 \cdot (-4) = -4,$$

ou seja, $\det A = 4$. □

(b) **(1,0p)** Resolva o sistema $Ax = b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solução: Já $\eta_{[0,1]}$ sabemos que $A = P^{-1}LU$, assim o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como $P^{-1}LUx = b$, ou seja, $Ux = L^{-1}Pb$. Fazendo $c = L^{-1}Pb$, podemos transformar este último num par de sistemas lineares, onde são procurados c e x tais que:

$$\begin{cases} Lc = Pb \\ Ux = c \end{cases} \tag{1}$$

Como P é uma matriz-permutação correspondente à troca de linhas $L_2 \leftrightarrow L_3$, Pb é obtido de b trocando-se suas segunda e terceira coordenadas, i.e., $Pb = (-1, -5, 1, -4)$. Como L é triangular inferior, o primeiro sistema, $Lc = Pb$, onde $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ é procurado, pode ser resolvido imediatemente por substituição: Da primeira equação tiramos que $c_1 = -1$, e substituindo este valor na segunda tiramos então que $c_2 = -4$ e assim por diante, $c = (-1, -4, 3, -4)$. O sistema $Ux = c$ também pode ser resolvido facilmente, usando retro-substituição: Da última equação obtemos que $x_4 = -4$, e substituindo este valor na 3ª obtemos que $x_3 = 2$ e assim por diante. Concluímos finalmente que $x = (-5, 3, 2, -1)$ é solução do sistema (1) e, conseqüentemente, também satisfaz $Ax = b$. □

3. Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -10 & a & b \end{bmatrix}$$

(a) **(0,5p)** Encontre valores para a e b de modo que C tenha posto 2. Use estes valores nos itens seguintes.

Solução: Devemos escalonar a matriz C para encontrar seu posto:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -10 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3' = L_3 + L_1]{L_2' = L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -10 & a+2 & b+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3' = L_3 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+6 & b+3 \end{bmatrix} = U.$$

O posto de C é igual ao número de linhas não-nulas desta matriz. Logo, este posto é 2 se e somente se $a = -6$, $b = -3$ e

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -10 & -6 & -3 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

(b) **(0,5p)** Determine uma base para o espaço-nulo (núcleo) de C.

Solução: Resolvendo o sistema $Ux = 0$ para as variáveis básicas x_1 e x_2 (correspondentes às colunas 1 e 2, que contêm os pivôs de U), obtemos que:

$$\begin{cases} x_2 = 5x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 = -10x_3 - 6x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

Uma base para $\mathcal{N}(C)$ pode ser obtida fazendo-se sucessivamente uma das variáveis livres igual a 1 e todas as outras iguais a 0 e substituindo-se estes valores nas equações acima. Os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ assim obtidos são:

$$(-10, 5, 1, 0, 0), \quad (-6, 2, 0, 1, 0) \quad \text{e} \quad (-3, 1, 0, 0, 1). \qquad \square$$

(c) **(0,5p)** Encontre uma base para o espaço-coluna (imagem) de C.

Solução: Uma base para o espaço-coluna de C é dada pelos vetores-coluna de C correspondentes às colunas que contêm os pivôs, a saber, as de número 1 e 2. Assim,

$$w_1 = (1, 1, -1) \quad \text{e} \quad w_2 = (2, 1, 0)$$

formam uma base para o espaço-coluna $\mathcal{R}(C)$. $\square$

(d) **(0,5p)** Apresente equações cartesianas para o espaço-coluna de C.

Solução: Como os dois vetores w_1 e w_2 de $\mathbf{R}^3$ geram a imagem $\mathcal{R}(C)$ de C, este último forma um plano passando pela origem. As equações cartesianas deste plano são

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz = 0,$$

onde (a, b, c) é um vetor (não-nulo) normal a este plano. Um tal vetor pode ser obtido tomando-se o produto vetorial $w_1 \times w_2 = (1, -2, -1)$. As equações cartesianas do espaço-coluna são:

$$x - 2y - z = 0. \qquad \square$$

(e) **(0,5p)** Encontre uma solução para o sistema $Cx = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, caso exista.

Solução: O sistema $Cx = b$ pode ser transformado no sistema equivalente $Ux = c$ por escalonamento, onde U é a forma escalonada de C (obtida no item (a)) e c é o vetor obtido de b pelas mesmas operações $L_2' = L_2 - L_1$, $L_3' = L_3 + L_1$ e $L_3' = L_3 + 2L_2$, nesta ordem, que fizemos para obter U a partir de C. Fazendo as duas primeiras operações no vetor b obtemos o novo vetor $(1, 3, -6)$, e fazendo então a última obtemos $c = (1, 3, 0)$. Logo, devemos encontrar uma solução para o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 0 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Já sabemos como encontrar uma solução para um sistema deste tipo, em que a matriz U dos coeficientes é escalonada: Basta fazer todas as variáveis livres iguais a zero, obtendo

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0.$$

Como vimos em sala, se y é qualquer outra solução de $Cy = b$ então y é da forma $y = x + v$, onde x é como acima e v é um elemento do núcleo de C. $\square$

4. Seja M uma matriz que representa uma transformação linear T. Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique as verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas.

(a) **(0,4p)** Se M é de ordem 7×4 e tem posto igual a 2, então a dimensão do núcleo de T é igual a dimensão da imagem de T.

Solução: *Verdadeira.* Como M é 7×4, a transformação T representada por ela tem domínio $\mathbf{R}^4$ e contra-domínio $\mathbf{R}^7$. O posto de M é a dimensão da imagem $\mathcal{R}(T)$ de T, e pelo teorema do núcleo e da imagem

$$4 = \dim \mathbf{R}^4 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{N}(T) + 2,$$

logo $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. $\square$

(b) **(0,4p)** Suponha que M seja 3×3 e que sua imagem seja gerada pelos vetores v_1, v_2 e v_3 não-paralelos 2 a 2. Então a dimensão do núcleo de T é 0.

Solução: *Falsa.* Suponha por exemplo que a imagem de A seja gerada pelos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$ de $\mathbf{R}^3$; mais especificamente, tome

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então v_1, v_2 e v_3 são não-paralelos 2 a 2 (nenhum vetor é múltiplo de outro), mas o espaço-coluna de M é igual a $\mathbf{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$, logo o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T tem dimensão 1, pelo teorema do núcleo e da imagem. $\square$

(c) **(0,4p)** Se M é quadrada então seu espaço-linha é igual ao seu espaço-coluna.

Solução: *Falsa.* Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então o espaço-linha de M é a reta pela origem de $\mathbf{R}^2$ de direção $(0, 1)$, enquanto o espaço-coluna é a reta pela origem de direção $(1, 0)$. $\square$

(d) **(0,4p)** Se T é uma transformação linear injetora então a dimensão da imagem de T é igual ao número de colunas de M.

Solução: *Verdadeira.* Suponha que T seja uma transformação de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$, i.e., suponha que M seja uma matriz $m \times n$. Se T é injetora então seu núcleo $\mathcal{N}(T)$ deve ser $\{0\}$. Portanto, deduzimos do teorema do núcleo e da imagem que

$$\dim R(T) = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathbf{R}^n = n,$$

onde $\mathcal{R}(T)$ denota a imagem de T e n é o número de colunas de M. $\square$