Exercícios Adicionais - Autovalores, espaços invariantes e diagonalização

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feito os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

1. Verdadeiro ou falso: existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cujo polinômio característico seja
$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)^2(4-\lambda).$$
Justifique.

2. Mostre que se $u_1, \dots, u_k$ são autovetores de $T : U \longrightarrow U$ linearmente independentes associados a λ, então $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$ é autovetor associado a λ para todo $\alpha_i \in \mathbb{R}$, desde que não sejam α_i todos nulos. Relembre que dada $T : U \longrightarrow U$ linear e λ um autovalor de T, o *autoespaço de T associado a λ* é o conjunto
$$V_\lambda = \{u \in U \,/\, T(u) = \lambda u\}.$$
Conclua que V_λ é subespaço vetorial de U.

3. Seja $T : U \longrightarrow U$ uma transformação linear, u_1, u_2 autovetores associados respectivamente aos autovalores λ_1, λ_2, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que u_1, u_2 são linearmente independentes.

4. Mostre que se v_1, v_2 são autovetores de $T : U \longrightarrow U$ associados respectivamente aos autovalores λ_1, λ_2 com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $v_1 + v_2$ *não é* autovetor de T.

5. Seja $T : U \longrightarrow U$ linear, V_{λ_1} e V_{λ_2} autoespaços associados aos autovalores λ_1, λ_2. Mostre que $V_{\lambda 1} + V_{\lambda_2}$ é subespaço invariante para T.

6. Verdadeiro ou falso: uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com n ímpar, sempre tem algum autovetor. *Dica: leia o enunciado do Teorema Fundamental da Álgebra – você encontra isso na internet, por exemplo.*

7. Mostre que para toda transformação linear $T : U \longrightarrow U$, o subespaço $\mathrm{Nuc}(T)$ é invariante.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2x + y, 3z).$$
   (a) Encontre os autovalores de T e os respectivos autoespaços.
   (b) A transformação T é diagonalizável? Se sim, dê sua forma diagonal. Se não, justifique.
   (c) Verifique que o plano x, y é um subespaço invariante para T. Algum vetor do plano x, y é autovetor? Algum não é?
   (d) Existe mais algum subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 invariante por T?

9. Seja $T : U \longrightarrow U$ linear e $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ autoespaços com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

10. Sejam H subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e $P_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção ortogonal sobre H.

    (a) Quem são os autovalores de P_H? Quem são os autoespaços associados? Qual a dimensão de cada autoespaço?

    (b) P_H é diagonalizável? Se sim, qual a sua forma diagonal?

    (c) Calcule $\det(P_H)$.

    Resolva (a), (b) e (c) considerando $R_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a reflexão em torno de H, ou seja, $R_H(v) = v$ para $v \in H$ e $R_H(w) = -w$ para $w \in H^{\perp}$.

11. Suponha que $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear. Seja $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

    (a) Calcule $T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_1 + v_2 - v_3)$.

    (b) Calcule os autovalores e autovetores de T e decida se T é diagonalizável.